



John Adams  
Library,




IN THE CUSTODY OF THE  
BOSTON PUBLIC LIBRARY.

SHELF N<sup>o</sup>

2110





Digitized by the Internet Archive  
in 2011

<http://www.archive.org/details/lectionesoptic00barr>







# Imprimatur,

*Edmundo Boldero* PROCANCELLARIO.  
*Pet. Gunning* Præfct. Coll. S. Joban.  
*Jo. Pearson* Mag. Coll. S. Trin.

*Martii 22. 166<sup>2</sup>/<sub>9</sub>.*



# LECTIONES

## OPTICÆ & GEOMETRICÆ:

In quibus

PHÆNOMENON OPTICORUM

Genuinæ Rationes investigantur, ac exponuntur:

E T

Generalia Curvarum Linearum Symptomata declarantur.

---

Auctore ISAACO BARROW,

Collegii S. S. Trinitatis in Academia Cantab. Præfecto,  
Et SOCIETATIS REGIÆ Sodale.

---

Οἱ φύσει λογιστικοὶ εἰς πάντα τὰ παθήματα, ὡς ἔπ' αὐτοῖς εἰπὼν, ὁξέως φαί-  
νονται· οἷον βραδείας, αὐτὴν ἐν τέτρω πωιδωθῶσι καὶ γυμνάσωνται, καὶ  
μηδὲν ἄλλο ὠφεληθῶσιν, ὁμως εἰσὶν τὸ ὁξύτεροι αὐτοὶ αὐτῶν γίγνεται  
πάντες ὁπωιδόασιν. Plato de Repub.

Ἀρχεῖ, εἰ τὰ μὲν ἔχειον. Arist.

---

L O N D I N I,

Typis Guiljelmi Godbid, & prostant venales apud

Robertum Scott, in vico Little-Britain. 1674.

---

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

RECEIVED OF THE

MICROFILMED COPY

RECEIVED OF THE

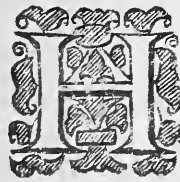
Large collection of

1974

---

---

SPECTATISSIMIS VIRIS  
ROBERTO RAWORTH & THOMÆ BUCK  
ARMIGERIS;

AS, à VENERABILI VIRO  
HENRICO LUCAS  
institutæ atque dotatæ, ab  
ipsis verò optimâ fide, summâque pru-  
dentiâ administratæ & constitutæ in  
ACADEMIA CANTABRIGIENSI,  
PROFESSIONIS MATHEMATICÆ  
primitias, gratitudinis ac observantiæ  
ergò, devovet

*Isaac Barrow.*

THE JOURNAL OF THE

ROYAL SOCIETY OF MEDICINE

VOLUME 10

PART I

1917

LONDON

1917

1917

1917

1917

1917

1917

1917

1917

1917

BENEVOLO LECTORI.



*Lectionibus his (quas jam quodammodò posthumas accipis) septem, unâ sepositâ, postremas Opticis illis, quæ nuper editæ prostant, Comitibus & quasi Mantissas destinâram; aliàs, opinor, de proferendis in apri- cum ejusmodi quisquiliis nihil cogitaturus. Sed cum nihilominus è re sua fore censeret Librarius ab istis divulgatas has seorsum com- parere; quin & ad comparandum huic Opel- læ speciem aliquam (ut ea nempe rejecta- nei Schediasmatis molem transcenderet), aliud quidpiam suppeditari cuperet; ejus (hand gravatim non dixero) votis obsecun- dans, adjeci Lectiones priores quinque; sub- sequentibus illis materiâ agnatas, & quasi coherentes; quas scilicet ante aliquot annos*

*ut*

## Ad LECTOREM.

ut nullo animo evulgandi, ità procul ab ea cura conceperam, quæ talem animum deceret; Enimverò crassius & ἐμπροσδιότερον scriptæ sunt, neque firmè quicquam continent, extra Tyronum, quibus accommodatæ sunt, usum, captumve jacens. quapropter harum rerum peritos obtestor, ut ab iis prorsus abstineant oculos, vel ut veniam saltem paullo liberaliùs indulgeant. alteras quas dixi septem conspectui tuo lubentiùs expono, nonnulla sperans in illis haberi, quæ nec eruditiores piguerit inspicere. Ultimam amicus (vir sanè cum primis probus, ast in bujusmodi negotiis Flagitator improbus) extorsit, aut certè, pro jure quod meritò obtinet suo, exegit. Cæterùm quid tractent, & quorsum tendant, facilè singularum initia delibans edoceberis; ut non sit cur te longiùs morer aut detineam. VALE.



# EPISTOLA ad LECTOREM.

BENIGNE LECTOR,



*Inimè tibi destinatum hoc quicquid est opellæ, statim ipse, modò digneris inspicere, multis ab indiciis deprehendes; nec tamen ut juris id tui fieret, defuerant auctores. quibus tandem, animo certè trepidans atque renitens, idcirco præsertim obsequutus sum, quoniam in hoc, quod ipse primus obièrim, munus successuris exemplo præire rem literariam; si minùs effectû, saltem conatu promovendi, non inhonestæ, nec ab officio meo aliena videbatur ambitio. accessit tenuis spes inesse bonæ frugis non-nihil, quod & aliquatenus tibi prosit, nec omnino displiceat. Memineris autem obtestor qui in his literis provectior es, quale scriptum attrectas; non utique tibi soli elaboratum; non sponte productum; non diuturnâ meditatione subactos exhibens feriantis ingenii conceptus; at Lectiones Scholasticas; primùm officii necessitate expressas; tum subinde properantiùs effusas, ut absolveretur pensum, ac hora deflueret; demùm ad promiscui literarii populi instructionem comparatas, cujus intererat complura (qualia tibi videbuntur) leviora non prætermitti; ut frustra futurus sis (id quod te monitum oportuit, nè multùm expectando tibi pariter obsis, ac mihi) accuratum hîc quicquam, affabrè positum, aut concinnè digestum sperans. Enimverò, quò tibi satisfacere, expediret scio multa detruncare, meliora substituere, pleraque transponere, omnia ad incudem limamque revocare; quæ tamen adniti, nec stomachi mei, nec otii fuit; sed nec facultatis exequi in puris itaque naturalibus (quod aiunt) & prout nata sunt emittere malui; quàm operosè lambendo aliam in formam, nec ipsam placituras refingere. quinimò postquam edendi propositum inii, seu fastidio correptus seu novandi subiturum studium fugitans, nè quidem horum magnam partem relegere sustinui; verùm, quod tenellæ matres facti-*

## Epistola ad Lectorem.

*facilitant, à me depulsum partum amicorum haud recusantium nutritiæ curæ commisi, prout ipsis visum esset, educandum aut exponendum. quorum unus (ipsos enim honestum duco nominatim agnoscere) D. Isaacus Newtonus, collega noster (peregregræ vir indolis ac insignis peritiæ) exemplar revisit, aliqua corrigenda monens, sed & de suo nonnulla penitus suggerens, quæ nostris alicubi cum laude innexa cernes. alter (quem nostræ gentis haud immeritò Mersennum dixerò, cùm suâ tum aliorum operâ provehendis hisce literis natum) D. Joh. Collinſius, ingente suo cum labore editionem procuravit. Possem jam alios expectationi tuæ obices ponere, seu veniæ conciliatrices causas obtendere (meam ingenii tenuitatem, experimentorum inopiam, alias intercurrentes curas) nisi Catonis senioris mordaculum illud in me subvererer recasurum: Rectè si Amphictyonum decreto constrictus hæc evulgas. Hujusmodi saltem præloquium partim æquitas exegit, partim in fœtum proprium sogyn quædam elicit, ut excusatiores, ac à censura munitior prodiret. sin acrior sis, nec hæc aure dextrâ admittere velis, pro tuo (per me licet) ingenio facias, quantumvis strenuè reprehendas.*

---

---

*Epistola ; in qua Operis hujus Argumen-  
tum, & scopus breviter  
exponuntur.*

**P**Ercontaris (amice cum primis charissimè) quid in  
Lectiōibus istis jam prælo subditis præstiterim, aut  
præstare voluerim . responso facile defungi possem,  
ea dicendo præstita videri, quæ singularum initia  
pollicentur, è quibus insequentium methodus, materiâ,  
scopus constare poterunt ipsâ delibanti . verùm in summam,  
opinor, ista contrahi vis, & sub unum aspectum redigi . id  
quidem ægrè possum, nisi ( quod juxtâ fastidiosum ac  
longum esset) complura *Theoremata* recitando ; sed ut-  
cunque morem tibi geram, rerum capita succinctè per-  
stringens. Generatim eò connitor, ut illam, quam tra-  
ctandam suscipio, *Opticæ* partem aliquatenus promoveam,  
ejus imprimis principia explicando ; tum ab ipsis *Utilia*  
*Conseſſaria* deducendo ; demùm præcipuos (quos animad-  
verteram) defectus supplendo, nec non *vulgatos errores*  
corrigendo . huc collimans, speciatim primò receptas hy-  
potheses ad examen revoco, quatenus admittendæ sunt  
& quomodò rectiùs intelligendæ edocere studens ; tum è  
physicis uerisimilibus causis ipsas eliciens ac astruens . quâ  
in parte mihi fidei multum attribui nolim ; quæ probabi-  
lora mihi visa protuli, neutiquam verò talia, quibus ipse  
magnopere confidam . valeant quantum valere possunt.  
Saltem hypotheses ipsas admitti peto, ceu experientiæ  
consentaneas, nec à ratione quaquàm abhorrentes.  
Hypothesibus constitutis, ab iis proximè generalia

*Epistola ; in qua Operis hujus Argumentum, &c.*

quædam *Theoremata* derivo, partim ab aliis agnita (quæ methodi gratiâ, & propter aliorum probationem, meis demonstrationibus firmata appono) partim à me observata. dein ad specialia progredior, id mihi negotii sumens, ut *Catoptrica*, ac *Dioptrica* utriusque, in usu maximè positæ (planæ scilicet & Sphæricæ) potissima pertractem. In *Catoptrica Sphærica* (siquidem plana jam olim verè satis, ac fusè exulta habetur) ejusmodi *Theoremata* propono, de quibus reflexorum radiorum intersectiones atque limites innotescunt; unâque punctorum tam à longè, quàm è propinquo radiantium imagines, & apparentes loci determinantur; respectu oculi nedum in radiationis axe, sed extra ipsum ubicunque constitui. quæ certè vel nusquam (quod sciam) aut magnâ ex parte perperam alibi tractata prostant; id quod, incidentèr aliorum refutans sententias, cùm ratiociniis perspicuis, tum experimentis decretoriis evictum eo. *Dioptricam* porrò tam planam quàm Sphæricam, refractionis novissimâ præstratâ lege vel hypothesi (quam illustris *Cartesius* detexit, at plerique, reor, meliores *Optici* jam amplexantur; quam & propter assignatas alicubi rationes veritati consonam judico) velut à fundamentis extruo. nec enim eorum, qui principium illud admiserunt, ipsum hætenus quisquam (in scriptis intelligo quæ viderim luci commendatis) huc applicuit. Hic autem imprimis puncta radiantia longè dissita (seu quasi parallelos emittentia radios) considerans, quo pacto ab ipsis profluentes radii detorquentur exquiro, *Theoremata* quædam eliciens, è quibus præcipua refractorum symptomata liquent, ipsorum intersectiones ac limites dignoscuntur; apparentia denique punctorum objectorum loca designantur, tam oculi respectu qui in axe, quàm ejus qui uspiam extra axem collocatur. tunc eadem attento quoad puncta sensibilibiter vicina, seu divergentibus radiis alluentia. sub extremum, quò paratior sit horum usus, punctorum

*Epistola ; in qua Operis hujus Argumentum, &c.*

punctorum per omnigenas lentes translucentium imagines singillatim exhibeo determinatas. Hisce qualitercunque confectis, de magnitudinum dijudicandis (istis nempe, quæ hujusmodi consequuntur inflectiones) apparentiis nonnulla generatim attingo; tum postea specialius ac uberius planorum objectorum imagines quales sunt, & quomodo designandæ commonstro. ab indè receptui cano. Memoratis autem hisce passim alia *πέρηξα* interspergo; de quibus tu videris, nam ego malim reticere.

---



Brevitatis gratiâ notæ quædam adhibentur, quarum hîc  
subjungitur interpretatio.

$A + B.$	<i>hoc est</i>	$A \& B$ simul acceptæ.
$A - B.$		$A$ , demptâ $B$ .
$A - : B.$		differentia ipsarum $A$ , & $B$ .
$A \times B.$		$A$ multiplicata, vel ducta in $B$ .
$\frac{A}{B} -$		$A$ divisa per $B$ , vel applicata ad $B$ .
$A = B.$		$A$ æquatur ipsi $B$ .
$A \sqsubset B.$		$A$ major est quàm $B$ .
$A \sqsupset B$		$A$ minor est quàm $B$ .
$A.B :: C.D$		$A$ ad $B$ eandem rationem habet, quàm $C$ ad $D$ .
$A, B, C, D \div \div$		$A, B, C, D$ sunt continuè proportionales.
$A.B \sqsubset C.D.$		$A$ ad $B$ majorem rationem habet, quàm $C$ ad $D$ .
$A.B \sqsupset C.D.$		$A$ ad $B$ minorem rationem habet, quàm $C$ ad $D$ .
$A.B + C.D$	$\begin{matrix} = \\ \sqsubset \\ \sqsupset \end{matrix}$	$\begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} M.N. \text{ Rationes } A \text{ ad } B, \\ \& C \text{ ad } D \text{ compositæ} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} \text{adequant} \\ \text{excedunt} \\ \text{deficiunt a} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} \text{ratione } M \\ \text{ad } N. \end{matrix} \right\} \end{matrix}$
$Aq.$		Quadratum ex $A$ .
$\sqrt{A}.$		Latus, vel radix quadrata ipsius $A$ .
$Ac.$		Cubus ex $A$ .
$\sqrt{Aq + Bq}.$		Latus compositi ex $Aq$ & $Bq$ .
<i>Reliquas, si quæ occurrunt, abbreviaturas Lector facili conjecturâ capiet, præsertim in analysi tantillâ versatus.</i>		

# Lect. I.

I. **P**æfatorio jam vinculo solutus, & scopulam præterve-  
ctus Rhetoricum, ad muneris mei proprium opus ac-  
cingor. Imprimis autem novi quod inierim consilii  
rationem, paucis expediam. Cum prius institutum ur-  
gens adverterim, occurrere pleraque nimiam attentio-  
nem desiderantia, nec ex improvviso auscultantibus, in-  
dè satis opportuna; incommodum etiam illud à puram Geometriam  
attrectantibus haud posse declinari; constitui, derelictâ tantisper  
istâ, protinus in amæniores (floribus nempe Physicis depictos, &  
fructibus consitos Mechanicis) mixtæ quam appellant Matheseos  
Campos deviare; Opticæ nimirum, Mechanicæ, Cosmographiæ, re-  
liquæ cujuscunque, prout occasio feret, & commodum videbitur. Ne-  
que tamen animus erit ullius ex his longè diffusa latifundia pervagari,  
vel extremos fines circumire; sed ad ejus quasi metropolim è vestigio  
rectâ procedere; primas tantum hypotheses excutere, præcipuâque  
(quibus illa tam vasta theorematum moles incumbit) fundamenta de-  
nudare; tum verò nonnulla, palmaria quidem illa, statim emergentia  
corollaria subtexere. Quorum certè *οικτις* jucunda præsertim, utilis,  
& fructuosa videri potest; quum è principiis rectè positis, probeque  
perceptis reliquorum & firma fides, & facilis comprehensio sub-  
nascantur.

*Præcesserat an-  
te loquium or-  
cationis, quæ  
fuit, adaptæ  
tunc.*

II. Ab Optica sumemus exordium; scientia cum primis Nobili;  
quam cum peculiaris amænitas, tum ingens commendat utilitas. Nam  
Naturæ simul detegendis arcanis, ac explicandis Phaenomenis minimè  
vos latet quantopere conducatur; neque minùs ad Astronomicas rationes  
quàm planè necessaria sit; ut Perspectivam, Picturam, & his agnatas  
alias eximias Artes taceam, quæ totæ quantæ quantæ sunt ab ea pendent,  
ac principia sua mutuuntur. Ut & præteream qualia, certè vix pretio

suo æstimanda, ad vitæ communis usum beneficia subministret; visus imperfectionibus & vitiis tam prompta, quam certa, minimi sumptus, & nullius periculi remedia conferendo. Neque, quum curiosissimus iste sensus noster ita varias indies, ita miras rerum species exhibeat nobis; non admodum oblectare nos, non eximiâ voluptate mentes nostras afficere possit, unde talis emergat apparentiarum diversitas, & quis sit illas attingendi modus nedum accuratè, certoque cognoscere, sed utcunque verisimiliter arbitrari; præsertim quum in nullâ parte nostri, nec in tota fortassis rerum compage, necessitatibus, commodis, & voluptatibus nostris prospicientis melioris naturæ seu fines agendi, seu modos plenius queamus perspicere; nusquam adeò distinctius aut apertius opificis *παιδεία* eluceat artificium. Verùm elogia pertexere non vacat, aut convenit nobis. Rem potius ipsam aggrediamur.

III. Quæ circa visum occupatur disciplina communiter in tria membra dispartitur; primum, quod visus directis radiis objecta cernentis affectiones considerat (hoc speciatim Optice nominatur; ) alterum, quod è radiorum ab opacis corporibus repercussu oriundas speculatur apparentias (cui Catoptricæ nomen inditum; ) tertium denique, quod ideò Dioptrica vocitatur, quia causas investigat, aut exponit eorum quæ à radiis apparent per diversa media translucentibus, & eorum occursu demutatis. Quam distributionem ut non improbamus, ita nobis haud observandam proponimus; nedum quia multa pariter his communia sunt, at præcipuè quia visio quævis, ut libet simplex ac directa, sicuti reverà non absque nonnulla radiorum inflectione peragitur, ita nec eâ seclusâ penitus intelligi potest aut explicari. Igitur huiusmodi methodo potius insistendum censemus; ut nempe primò visionis causas (quæ scilicet illam extrinsecus efficiunt, aut afficiunt) examine-mus; tum ut videndi modum (hoc est quo pacto sensus hic noster idoneis organis instructus istis concurrentibus causis, objectorum illas, quas experimur, differentias apprehendit) adnitamur exponere; dehinc, ut Phænomena quædam selectiora suscipiamus elucidanda; postremoque forsàn, ut de visus remediis ac subsidiis aliquid sub-jungamus.

IV. Visionis causas externas quod attinet, nemini jam dubium est; existimo, non ullâ (quanquam *Empedocli*, *Platoni*, *Euclidi*, veteribus aliis id placitum erat) ab oculo radiorum emissionem, verùm ab objectis defluente re quâpiam, oculosque percellente visum effici; quod &

*Democrito*



*Democritus* jam olim, ejusque sequaci (dicam an *simio*?) suboluerat *Epichuro*. Quod sanè malim adsumere, vel supponere, quam post tot alios operoso nisu comprobare. Certè (quo brevissimè tangam hanc quæstionem) sic in alia qualibet evenitensione, (quidni pariter in visu?) non ut sensus in objecta feratur, sed ut ipsa se sensibus imprimant; immediato nempe contactu, vel mediocujusdam seu projecti, seu commoti interventu. Tum ratio verat, ut ex oculo quicquam in immensam adeò circumquaque distantiam credamus emanare; neque quod sic emanet in eo quidpiam aptum natum deprehendimus. Totus enim verò pellucidis humoribus aut membranulis constat opacis, ad transmittendam lucem, vel ad eam excipiendam, aptissimè, sed ad progigendam à se vel ejaculandam haudquaquam comparatis. Quòd si lucem ipse profunderet, insitisque radiis attingeret objecta, quidni densissimis in tenebris hoc præsertim faceret, & feles vel (Historicis si placet) *Tiberii* fieremus omnes? Quæ, dico, lucis externæ tam indispensabilis ad visum necessitas esset? *συναγωγὰς* equidem *Platonica*. Sonum audio, vim non capio. Demum ab objectis, etiam à tergo sitis, circumfusas species quas vocant, ad oculos deportari, suique perceptionem efficere, cùm à speculis, tum ab aliis innumeris perquam obviis experimentis compertum habetur; illarum igitur efficaciam quidni commodissimè visionem adscribamus? satis hæc illam quam adsumimus vulgarem jam hypothefin adstruunt, quam & totus dicendorum tenor luculentè confirmabit.

V. Cùm verò multa visum afficiant diversimode, puta lux, lumen, dies, crepusculum, colores, rerum imagines, phasmata; nec tamen absque luce. (Præsentè nimirum aut prævia) quidvis horum aliquid peragat, perspicuum est lucis hinc præcipuas partes, primariam efficaciam fore. Quinimo rem sedulò pensitantes, eò deveniemus, opinor, ut varias his omnibus adnexas apparentias non aliunde quàm ex diversimodà lucis unius operatione putemus proficisci. Cùm nempe lux sit illud quicquid sit quod à corpore lucido (quale stella, ignis, flamma) proveniens immediatè visum afficit, lumen nil videtur aliud quàm lux in corpuscula quædam opaca (seu lucem non penitus excipientia) *τὸ ἀέριον* interspersa impingens, nec non ab iis in omnes undique partes resiliens; quæ scilicet in oculum itineri suo expositum tumultuariè delapsa confusam quandam apparentiam excitat; quàm, si fortior sit, eique prorogandæ lucens præstò sit, appellamus diem; at si debilior fuerit, ejusque fons abscefferit, crepusculum dicimus. Etiam color nil fermè videtur aliud, quàm lux à corporibus quibus occurrit

majusculis, & aliquatenus stabilem suarum partium situm retinentibus (pro varia particularum, è quibus illa componuntur, figura, dispositione, textura, hoc vel illo modo) detorta vel utcumque repereussa; nimirum ut ejusmodi corporibus illapsa lux vel motu suo, vel agendi virtute, vel ipsa quantitate sua (quoad raritatem intelligo, vel densitatem; radorum copiam, aut paucitatem) talis evadat, & pro modi discrimine dispares procreet apparentias, à quibus eam variis colorum nominibus insignimus. Imagines autem nil planè sunt aliud, quum lux ab objectis ita reflexa, vel refracta, ut rursus in unum locum, talémque recolligatur situm, qualem tunc obtinuit, quum ab originali profuieret objecto; directioque versùs oculum itinere procederet; quofit ut similiter objecta, sed tanquam alibi collocata repræsentent. Phasmata denique sunt imaginum quasi colores, pro lucis diversa media trajicientis alia ac alia quoad motum, vim, quantitatem. affectione. diversa variati Crassiusculè jam ista proponimus; quorum forsàn aliqua saltem in dicendorum progressu magis elucescent.

VI. Cùm itaque lux in visione peragenda, diversisque procreandis apparentiis ita quasi paginam utramque faciat; Et reverà præter illam nil aliud sensum ingredi, vel commovere videatur; de illa primò disciendum venit. Et ejusce quidem de natura à Physicis magnoperè descèptatur; an puta sit corporea quædam substantia, an qualitas; an actio tantum, aut motus quidam; de productione quoque consequenter ejusdem, & propagatione disquiritur, utrùm continuo per medium transitu, vel medii duntaxat impulsu, vel sua ipsius multiplicatione quædam huc propagetur; quales ego quæstiones curiosè non eventilabo. Quod istam saltem sententiam attinet, quæ lucem accidentium classi accenset; quando veris corporeis effectibus (quales sunt rectà progredi, reperi, refringi, calorem excitare, sensum afficere) verè subsistentes causæ, veri locales motus assignari debeant; neque quomodo meræ qualitati, vel accidenti cuiuspiam ista competant intelligere mihi datum sit; quinetiam quo sese pacto multiplicare valeat, id genus entium, quâ ratione vim ullam exerere, cùm è cordatioribus & rerum intima perscrutantibus Philosophis haud pauci se parum capere profiteantur; eam haud dubitem hic missam facere. Verùm an corporeæ quædam ἀπόρροια, de lucidi corporis visceribus emanantes, totumque nobis & ipsi interjectum spatium quàm perniciosissimè transcurrentes lucem constituent; vel an illa potius nihil sit aliud quàm ipsius lucentis actio, contigua sibi corpora prementis ac impellentis, iisque mediantibus alia quæ adjacent; tum & horum intercessu rursus alia proximè succedentia;

cedentia; nec non ita perpetuâ deinceps ad nos deductâ serie; vix aulim certè mihi dijudicandum accipere; adeò paribus utraque pars argumentis niti videtur, æquis utraque difficultatibus urgeri. Quin eò fere propendeo, ut censeam utroque subinde modo lucem procreari, tam per effluvia corporea, quàm per continuum impulsus; satiùsque fore nonnullos ejus effectus huic, alios illi tribuere. Sanè cum ad quantum intervallum undiquaque protensum exiguæ lampadis flammula se vividè conspiciendam præbeat, adeò quidem ut integrum ejus radiatione circumpositum medium perfundi complerique videatur, animadverto; quomodo tantillum corpus tali tamdiu suppeditandæ profluviorum copię par sit; quomodo dum ea profundit non ipsum plusquam exhaustiatur, & confestim evanescat, haud facile capio. Cum verò rursus lucis inflectiones, illasque qui consequuntur effectus cogito, vix animo meo nudus impulsus facit satis. Itaque mentis anxius hæreo. Veruntamen quia de natura lucis aliquid præsternam expedit, iis quas mox tradam hypothesibus nonnihil explicandis congruum; hoc se modo, vel non absimili rem habere concipio.

VII. Pono corpus omne lucidum, ut tale, congeriem esse quandam corpusculorum ultra pene quàm cogitari potest minorum & exilium; horum autem unumquodque vehementissimo motu percitum, aliquò (secundum legem istam naturæ satis receptam & exploratam) rectà tendere; tum medium circumstare, fluidum quoque (cujus nempe partes nullo colligatæ nexu quaquaversum liberè feruntur) è corporibus aggregatum, exilissimis quidem & illis, ast priorum respectu bene crassis & solidis; ita tamen ut hoc meatus habeat, & interstitia tenuioribus illis admittendis opportuna; quin & horum crassiorum corpusculorum occursum progressum impediri multorum ex illis, quæ in lucidi superficie versantur, aut ab ea ruunt corpusculis; ut necesse sit iis sic inhibitis, atque repulsis introrsum se recipere, quo fit ut dicta congeries (aliis etiã in eam aliunde confluentibus ejusdem naturæ corpusculis) aliquatenus intra suos cancellos restringatur, nec toto statim in auras expansa dissipetur. Interim verò complura per dictos canales repertâ viâ cursum suum rectà continuare, materiam inibi deprehensam haud ita foriter obfistentem in fugam agentia, & ante se protrudentia; quorum vestigiis alia de lucido corpore similiter prodeuntia prorsus insistent, longumquè simul omnia lucis rivulum efficient, inflexâ serie procurrentem. Quin & istorum fortè nonnulla memoratas medii crassiores particulas impetu ferire tam prævalido, nonnunquam ut ipsas quoque cedere cogant, & secum conspirantes in directum adjacentia

centia, corpora propellere; quæ & pari modo proximè succedentibus vim inferent, & ita continuo, sic ut simul & semel indefinitè protensa talium corpusculorum series promoveatur, & antrorsum connitatur; qualis utrolibet modo producta lucis propago radius consuevit appellari. Ità quidem rem existimo simpliciter obtingere, donec medium permanet homogeneous, hoc est ejusdem fermè magnitudinis, soliditatis, ac figuræ partibus constans, & similibus interstitiis pervium; at si medium occurrat aliter affectum, è diversis quippe secundum quantitatem aut figuram particulis compactum, porisque laxioribus, aut strictioribus pertusum, cujusque proinde materia vel promptius cedat, aut contumaciùs obluetetur, oportebit illius seu cursûs, seu impulsûs vim, effectumque demutari; quin & si novi medii superficies ita transeunti lucis amni se obliquam objiciat, ejus quoque directionem infringi; vel ἀναλλασιν contingere, quam *Aristoteles* vocat, eo nomine (quas nunc distinguere solemus) reflectionem simul ac refractionem complectens. Enimverò materiæ impingens ità compacta, ut venienti transitum perneget, aut prementis impetum inconcussa sustineat, aliò tota quò facillimè poterit & directissimè, regredietur & resiliat; aliò vim suam quàm retinet omnem derivabit; id quod lucis reflectio dicitur (Hujusmodi verò corpus lucem non suscipiens eatenus opacum, (Hoc est terrenum, ut Grammatici volunt, ab Ope vocabulo prisco tellurem designante) appellatur; quatenus autem sibi incurrantem aliò projicit, illustratum dici; quatenus objecti speciem redhibet aspicienti, speculum.) Quòd si verò materia luci progredienti sic obviam facta transitum utcunque præbeat, ejusve conatum excipiat, lentius tamen aut paratius præ illa, per quam priùs decurrebat, tum virtutis suæ quantitate aliquantum hinc variatâ simul à recto quod affectabat itinere deflectetur; eo nimirum ordine modoque quem posthac conabimur elicere. Qualis effectus refractionis nomine venire solet (subnotetur autem, hoc modo lucem intromittens medium eatenus perspicuum, diaphanum, transparens, pellucidum appellari.) Ità lucis naturam, originem, propagationem, ac progressum ἀλογερώς (omissis quæ adjungi possent plerisque minùs ad nostrum propositum spectantibus) expono; nec aliud ferè præter hæc requiro declarandis hypothesebus, quos communiter adsumunt Optici; quæque necessariò debent huic extruendæ Scientiæ præsterni. Comprobandis autem iis, quæ dixi non incumbam; cum & (quod instituto nostro satis est) talia dari posse non minùs ipsâ luce clarum videatur, imò reverà dari complura declarent experimenta. Opticas verò quas innui hypotheses præcipuas subjunge-  
mus, & nonnihil attentabimus explicare.

VIII. 1. Radii lucis (hoc est lucidi transitus aut impulsus quales descripsimus tramites) in eodem existentes similari medio directi sunt. Hoc è dictis abunde patet. Quin inde Corollarii vice deducitur radios quoad rem ipsam, Physicèque loquendo figurà prismaticos esse, vel cylindricos. Nempe corpusculum illud quodpiam in lucidi superficie positum, à quo radius originem suam ducit, dum à primò suo loco ceu base defertur aut totà suà superficie contiguum sibi corpus rectà propellit, figuræ suæ (vel impulsu saltem corporis figuræ) congruum designat, super hac vel illa base constitutum, solidum longum, exile, teres, quale cylindrus, aut prisma. Proinde quando Mathematicè rem tractamus, istos radios pro rectis lineis habere possumus; tum quia reverà sunt adeò tennes & recti; tum quia plerumque pro cylindricis ejusmodi seu prismaticis figuris ipsarum axes ità sumi possunt, ut nihil inde ratiocinio Mathematico derogetur.

IX. 2. Ab omni corporis lucidi (vel illustrati) puncto ad quodvis mediū (non obstaculis intercisi) punctum lucis aliquis radius dirigitur. Hæc apud Opticos tritissima suppositio quò vel intelligi vel admitti possit, omnino duplicem limitationem exigere videtur, è supra dictis utramque deducibilem. Unam, ut omnis puncti nomine nedum non præcisè punctum quodcunque Mathematicum, ac nec omnem particulam concipiamus realem & Physicam; verum saltem admodum exiguam, qualique ferme minorem vel animo designare nequeamus; alteram ut non in unoquoque strictè dicto temporis instanti, nec in omni reali temporis portiuncula cogitemus hoc contingere, sed ut nullum temporis intervallum sentiri possit ità curtum, aut momentaneum, quin intra ipsum à quavis lucidi designabili parte designatam ad mediū partem radius aliquis exporrigatur. Enimverò cum radorum istæ quas assignavimus radices, lucidum componentia corpuscula, sint illorum, quorum nos utcunque quantitates sensu vel animo pertingere valemus, corporum respectu tanquam infinitè parva, nec non infinità quasi pernicitate donata, non difficilè concipi potest in omni designabili, vel imaginabili lucentis spatiolo prorsus innumerabilem eorum multitudinem existere, quorum fere singula diversas in plagas tendunt; ut nulla sit designabilis plaga, quam non una quæpiam appetat, aliquam saltem, utlibet imperceptibilis & angustæ, temporis moram interponendo. In eo siquidem tempusculo lucidi partes singulas innumera successivè talia corpuscula subingrediuntur juxta deferuntque, de quibus mirum fuerit ni quoddam unum ad designatum mediū spatium tendat, sibi transmittendo meatuum aliquem (quos & pari ratione tan-

quam

quam infinitos supponere fas est) idoneum reperiens. Ità vulgare pronuntiandum interpretor; id quod aliàs rigidè sumptum haud verum duco. Nec enim idem corpus eodem temporis puncto diversas in partes contendere, vel adniti; sed nec eandem præcisè mediæ partem è diversis locis accedentes corporum motus excipere quisquam conceperit, opinor, aut ego concesserim; non certè magis quam idem corpus unà plures locos occupare, vel eundem locum plura simul corpora suscipere; ad istum modum intellecta dicta suppositio totam unà cum radiis lucidis naturam, omnem, ut mihi videtur, Physicam permiscebit. In nostro rem explicandi modo nihil durius observari video, quàm ut hinc divinæ potentiae, sapientiaeque vis magis elucescat, in luce sic efformanda, tam ejus effectricibus particulis admirabilem exilitatem, incomprehensibilemque velocitatem impertiendo, quæ prorsus ei necessariae fuerunt, ut sensationem efficeret, & reliqua tam utilia ei destinata munia obiret. Sanè lucis corpusculum unum ab arenula quavis litorea plusquam eâ fortassis proportionem superatur, quâ tota quanta quanta est mundana moles arenulam istam excedit; id quod non ita censebit absonum, quisquis ad complures satis obvias apparentias mentem adverterit.

Subnotandum est porrò duas has fundamentales hypothesen, sic acceptas, innumeris admodum familiaribus experimentis confirmari. Quovis enim in loco ubicunque collocati objecti lucentis vel illustrati quæcunque designabilis particula conspicitur oculo, repræsentatur in speculo, modò nihil objiciatur ab eo rectâ delabentes radios intercludens; eadem verò statim oculo subducitur, & penitus obumbratur, si quid opaci corporis directum intercipientis radiorum iter obtendatur. Etiam foramen utcunque tantillum sufficit trajiciendis radiis quibus tota quantitas objecti facies obversa depingatur. Et porrò quam nullà possit apprehendi tam exigua lucidi pars, à qua non lux ad oculum defluit, perspicilliorum usus apertissimè monstrat. At pergo.

X. 3. Lucis radius quilibet alteri medio perpendiculariter incurrens, aut rectâ progreditur, liquidem cedente medio procedere valet, aut in partes directè contrarias (hoc est in se, vel in suam retro semitam) repellitur. Experimentiâ firmatur hæc hypothesi; & rationi quoque consentanea est; nec enim ulla potest excogitari causa, cur in unas potius quàm in alias partes deflectatur; igitur in nullas. Quinimò si verum sit omne patiens, aut percussum vim inferenti positivâ quâdam vi repugnare, perspicuum videtur eò resistantiam dirigi, unde vis ingruerat; ejusque consequenter effectum absolutè loquendo, tantum illic deprehendi.

deprehendi. Quod sanè mihi tam verum apparet, ut non dubitem hanc ipsam hypothèsin ad omnimodos incursum extendere, seu generatim effari, quod pulsus omnis & motus, utcumque medio culibet impingens, directè (per se nimirum, propriè, distinctèque rem estimando) continuatur, aut prorsum aut retrorsum. Scilicet, exempli causà, si duo baculi  $ABYZ$ ,  $CDYZ$  in idem medium  $EF$  (illud perpendiculariter, hoc obliquè) uniformi quàdam pressione vel impetu adigantur, existimo medii cessione vel resistentià totam (quà baculus obliquus fertur, aut medium impellit) vim æquè rectà semitâ antrorsum versus  $IK$ , vel retrò versus  $CD$  derivari, ac perpendicularis ipsius impetus in  $GH$  progreditur, aut regreditur in  $AB$ . Quod enim nonnulli putant medii superficiem baculi perpendicularis tendentiæ magis opponi, quam obliqui, proindeque perpendicularis impulsus rectà continuari, sed obliquum aliò detorqueri; vel assertionem ipsam non agnosco, vel non admitto consequentiam. Enimverò si per illud opponi nil aliud volunt quàm realiter objici, seu obstare rectà pergenti, non minus eo modo superficies  $EF$  opponitur baculo  $CD$ , quàm ipsi  $AB$ ; rectum enim ejus progressum pariter intercipit, impedit, demutat. Verùm si quam aliam nescio quam imaginariam oppositionem intelligunt, nihil video quod huc faciat indè confectari. Profectò rem abstractè, nec ut accidentarium quid immisceamus, expendendo, nihil attinet ullam medii partem considerare præter illam; ad quam corpus progrediens aut propellens ei occurrit; hæc enim sola resistendo quicquam efficit, aut cedendo. Quare per rectam  $DZ$  progredienti impulsui solum punctum  $Z$  opponitur; perindèque fuerit qualem reliqua medii superficies obtinere sitam concipiatur. Punctum autem  $Z$  æquè pulsui venienti à  $D$  per rectam  $DZ$ , atque tendenti per rectam  $ZK$  versus  $K$  contrariatur, ac ei qui à  $B$  per  $BZ$  procedens iter affectat per  $ZH$  versus  $H$ . Idémque de reliquis medii punctis intelligi par est, quibus uterque baculus ipsum contingit, aut ei applicatur. Itaque reverà par utriusque pulsus quoad oppositionem est ratio; similisque proinde utrobique resultabit effectus; pulsus nempe recto tramite vel transmittere, vel rejicere. Verùm longè secus eveniet, si baculum alterum obliquum, seu  $P DYQ$ , cum ipso  $ABYZ$  conferamus. Etenim superficies  $EF$  baculi  $ABYZ$  motui, vel impulsui magis opponitur, aut obstitit, quàm motui vel impulsui baculi  $P DYQ$ . Quoniam illi toti cum tota sui parte  $YZ$ , huic vero tantum ex parte  $Y$  renititur; è qua discrepantia necessario dispar effectus consequetur, ut nimirum pulsus aut motus directio mutetur. Quod discrimen eo lubentius adnoto, quoniam hoc arbitror modo (vel adsimili) lucis radios

diōs diverso medio obliquè incidentes, velut experimur, inflecti; saltem eò spectantia lucis præcipua symptomata, tribus porro subjiendis hypothelibus comprehensa, vix aliâ ratione commodius explicari.

Fig. 2.

XI. 4. Omnis radii lucidi inflectio (hoc subinde generali nomine, compendii causâ, tam refractionem, quam reflectionem complector) fit in superficie ad mediū inflectentis superficiem perpendiculari, seu recta. Hujusce suppositionis haud ullam faciliè satis commodam & claram rationem reperias apud Opticos; petitione principii, vel incomprehensibili quâdam obscuritate laborat quicquid fermè eò spectans afferunt; neque valdè miror radium lucis semper ut rectam concipientibus individuum lineam id eis accidisse; quo posito vix probam ullam ejusce rei causam assignari posse credo. Cadat enim radius linearis  $AB$  in speculi (instantiæ gratiâ) plani superficiem ad punctum  $B$ ; per quod utcumque ducantur duæ rectæ  $CD$ ,  $EF$ ; cum igitur rectæ  $AB$ ,  $CD$  sint in uno quodam plano, quidni reflectio radii peragatur in isto plano? Simili ratione quoniam rectæ  $AB$ ,  $EF$  sunt in uno plano, quidni radius in hoc etiam reflectionem patiatur? eodémque planè modo quid obstat quo minis in singulis omnibus, hoc est infinitis planis, speculi superficiem secantibus, & per rectam  $AB$  ceu communem sectionem traductis perficiatur reflectio, idémque proinde radius unus in partes undique cunctas reflexus dispersgatur? cur hoc fieri non possit, utique non capio. Quod respondetur enim, posito plano  $ABC$  ad speculi superficiem recto magis illud planum, quam cætera quævis speculi superficiæ contrarium esse, proinde resistentiam in eo maximam contingere, proptereaque radium in eo potissimum inflecti, parùm satisfacit; quoniam, ut superius insinuatum, extra punctum ipsum  $B$ , cui radius impingit, alia nulla specularis superficiæ pars merito venit consideranda quid enim (ut hoc adjiciam prædictis) an in universam quâ longè latèque distenditur, ipsius speculi superficiem agit hic linearis radius, & ab ea vicissim patitur; an in ejus definitam aliquam partem agit, patiturque ab hac? quis in totam agere, vel à tota pati concedet? Et cur id uni parti deputandum præ aliis? ubi terminus figetur? quousque procedet operatio? quinimò potius, quia radii per rectam  $AB$  procurrentis impulsui tantum id speculi quod est in recta  $AB$  versus  $G$  protracta resistit, ideò pulsus in ipsam  $AB$  rejicietur; Et nulla succurrit causa fontica, propter quam aliorsum deflectat; nihil datur, quod ejus tendentiam aliò determinet. Igitur ut aliis, quæ puto variæ assignantur, hujus effecti causis excutiendis abstineam, inde genuinam ejusce rationem (ut & generatim omnium quæ



quæ circa radiorum inflectionem primitus obveniunt) existimo petendam, quod lucis radius non mera sit linea, verum dimensionibus omnimodis præditum corpus; utpote (juxta quæ præmonuimus) cylindricum aut prismaticum, pro figura corpusculi, à quo oritur. Supponatur, aliquatenus illustrandi propositi ergò, Parallelepipedum  $AB C D E F G H$  lucis radium obliquè speculo incurrentem repræsentare; cuius latus  $B F$  applicetur speculo, dum interea reliquum ejus supra speculi planum elevatur. Impedietur ergò Parallelogranium  $A B F E$ , nè recta procedat; indè continget rectam  $B F$  aliquò supra dictum planum resiliere. Verum in alias saltem partes fiet hæc reflectio, secundum quas rectus radii progressus, quoad ejus fieri potest, quàm minimè pervertetur. Cum enim is rectissimum cursum affectet, eum (ex indole certa, perpetuæque lege naturæ) si perfectè nequit, at tamen ut proximè consequetur. Itaque cum inter plana latera  $A B D C$ ,  $E F H G$  sibimet opposita cursus ejus antea dirigeretur, & objecta superficies nihil jam obster, quo minus inter eadem plana, tamen si sursum excussus, progrediatur, admodum liquet etiamnum inter illa semitam ejus contineri; locumque seu plagam reflexionis eatenus haud perperam determinari. Cæterum est planum  $A B D C$ , eique oppositum  $E F G H$  speculi plano rectum; quia Parallelepipedum rectum ponitur, & ideo lateralis recta  $B F$  in speculi plano existens, planis  $A B D C$ ,  $E F H G$  recta. Quocirca si totum hoc Parallelepipedum ob exilitatem suam, aut Mathematicæ computationis gratiâ, pro recta quasi linea censeatur, erit pariter & reflexus radius etiam linea recta; nec non uterque continebitur in superficie ad speculi planum recta. Non dissimili ratiocinio, si radius cylindri recti figura præditus admittatur (qualis nimirum à corpore procurrente, vel impulso producet, id si Sphæricum fuerit) etiam radius in superficie plano speculi recta reflectionem ostendetur subire. Speculi quippe plano rectus incidat cylindrus  $A B D C$ ; cuius bases  $A M C N$ ,  $B O D P$ , axis  $X Z$ ; ita scilicet, ut basis  $B O D P$  speculi planum contingat in  $B$ ; reliquum ejus corpus (prout in figura depictum exhibetur) obliquè surgens supra planum emineat. Basis autem diametri  $B D$ ,  $P O$  sese normaliter secant; ac per ipsam  $P O$ , & axem ductum planum efficiat in cylindro Parallelogrammum  $P O M N$ . Si jam per hujusce latera  $M O$ ,  $N P$  ducta concipiantur duo plana axi parallela, cylindrumque contingentia, liquebit (ex antedictis causis pariter applicatis) totius cylindri ductum inter hæc duo plana comprehendi, radiique reflectionem inter ipsa definiri. Sunt autem hæc plana speculi plano recta. Sit enim recta  $G B H$  communis sectio circuli  $B O D P$ , planique

Fig. 3.

Fig. 4.

specularis; hæc utique circulum continget; (quia speculi planum, ex hypothesi, non alibi præterquam ad B circulo occurrit, adeoque nec recta GH) quare rectæ GH, OP sunt parallelæ. Ergo PO est ad speculi planum parallela. Huic verò perpendicularia sunt plana prædicta cylindrum contingentia per MO, NP ducta; axi parallela. Quapropter eadem speculi plano rectæ erunt. Hinc, ut antea, si totus radius habeatur instar rectæ lineæ, continget ejus reflectio velut in superficie ad speculum planum recta; quippe cum ejus latitudo tota comprehendatur inter ejusmodi duo plana; quæ proinde si nulla supponatur, in unum illa coalescent. Accommodari possent hæc cuicunque radii figuræ tali, qualem supra descripsimus, utcunque nonnulla demutando; sed & eadem pari ratione radiorum refractionibus adaptentur. At pluribus parco.

## LECT. II.

I. **V**ia, quam nuper aperuimus, & aliquatenus ingressi sumus, inhærentes eò jam devenimus, ut nobis incumbat proximè celebres illas hypotheses (an Theoremata malitis appellare) radiorum inflexorum itineri penitus determinando (imaginumque proinde locis, figuris, quantitatis investigandis, nec non apparentiarum quarumcunque causis explicandis) necessarias, experientiæ quidem bene consonas illas, etiam aliquo rationis suffragio communire; præstratis utique fundamentis, ac suppositionibus insistendo. Cum itaque lucis radio corpus adsignatum sit figurâ prismaticum, aut cylindricum; Et hoc quidem rectum (utpote præ reliquis simplex, & naturæ totas suas in agendo vires exerenti præsertim conveniens; ) cum & exinde progressus ejus eatenus fuerit definitus, ut intra superficies duas planas inflectenti medio perpendiculares includatur, quas quidem abhinc (quando nullus transversæ dimensionis illius, vel intervalli superficies istas dirimentis ad rem nostram, illam saltem quam nunc attingimus spectans effectus, aut usus sit) brevitatis & perspicuitatis causâ, velut unam habere possumus; adeoque jam radium ut duabus solummodò dimensionibus præditum, & ad instar Parallelogrammi cujusdam rectanguli, in plano ad medii inflectentis superficiem recto jacentis, considerantes, reliquam itineris quod persequitur determinationem, ultimam

nam illam & completam, investigabimus, ac exponemus; ejusce quidem circa reflectionem inquisitionis consecutaria resultabit hæc propositio, passim ab Opticis recepta;

II. 5. *Radius incidens, & reflexus ad speculi, vel opaci reflectentis superficiem angulos constituunt aequales.* Hujus effecti declarationem sic exequimur. Parallelogramum rectangulum  $ABCD$  lucis repræsentet radium obliquè plano speculo  $EF$  incidentem. (Recta scilicet  $EF$  sit communis sectio plani ad speculum re: i, in quo dictum Parallelogrammum existit, & in quo, secundum præmissa, reflectio peragitur, cum plano speculi.) Cum itaque Parallelogrammi punctum  $B$  speculo primum impingens opaco ac impervio, recta progredi nequeat, conetur oportet (ut præstruximus) retrò versus  $A$  per ipsam rectam  $BA$  resilire. Cum autem interea rectæ  $BD$  supra speculum eminentis alter terminus  $D$ , nullo præpeditus obstaculo pari vehementiâ cursum quoque suum adnitatur promovere per rectam  $CDH$ ; palam videtur utriusque conatibus adversis non aliter facilius aut propius satisfieri posse, quàm si utrumque circa punctum  $Z$  rectæ  $BD$  mediam rotationem concipiat. Sic enim utrumque pariter & quàm minimum à recto quem affectent cursu deflestant; siquidem rectæ  $BA$ ,  $DC$  circum  $B$  &  $D$  tangunt, centro  $Z$  per  $B$  &  $D$  descriptum. Cum autem hujusmodi motum circularem obeundo punctum  $B$  descripserit arcum  $B\epsilon$ , & punctum  $D$  arcum  $D\delta$ , hoc est quando recta  $BD$  obtinuerit situm  $\epsilon\delta$ , etiam ipsum punctum  $D$  speculo impinget ad  $\delta$ ; reditumque proinde per arcum  $\delta D$ , scilicet ipsius quoque jam interciso cursu, molietur; Sed & nunc temporis ipsum punctum  $B$  ad  $\epsilon$  positum per arcum  $\epsilon D$  tendit; quorum certè motuum adversantium alter alterius effectum impedit; itaque proximo saltem, quoad fieri poterit, utrumque progressus arripient; proximi vero sunt qui per tangentes  $\epsilon\alpha$ ,  $\delta\kappa$ , qui & sibi nihil repugnant, at potius omnino secum conspirant; itaque punctum  $B$  per rectam  $\epsilon\alpha$ , punctumque  $D$  per rectam  $\delta\kappa$  procurent, adeò ut totus radius  $ABDC$  jam acquirat situm  $\alpha\epsilon\delta\kappa$ ; & per hanc orbitam recta motum suum prosequatur. Liquet autem angulos  $ABF$ ,  $\kappa\delta E$  æquari. Nam æquantur anguli  $ZB\delta$ ,  $Z\delta B$ ; quapropter adjunctis hinc inde rectis  $ZBA$ ,  $\epsilon\delta\kappa$  toti  $ABF$ ,  $\kappa\delta E$  pares erunt. Unde patet è duobus quoque rectis residuos  $ABE$ ,  $\kappa\delta F$  æquari; quod propositum fuit ostendere.

Fig. 5.

III. Ità de præmissis suppositionibus nostris fundamentalem hanc Caroprictæ legem seu regulam elicimus, quàm verisimiliter autem con-

cinnè

3. 6.

cinnè penes vos esto iudicium. Non diffitebor autem aut penitus dissimulabo non esse nihil quod his objici possit, & dubitandi causam injicere. Cur enim, percontetur aliquis, quando solum punctum B versus A renitatur, & totum lineæ B D quod superest partes appetat contrarias, non circa punctum quodpiam aliud in ipsa B D, puncto B propinquius, ut puta circa X, potius ista gyratio concipiatur peragenda? Respondeo quàm brevissimè (quoniau incitato cursu tendens ulterius ægrè remoras fert) id in natura constanter accidere, quum motus rectus in circularem degenerat, ut extremæ sibi met adversæ mobilium partes omnem motum dirigant ac moderentur, reliquis ad illarum ductum componentibus se, morûsque suos attemperantibus; neque non his quos ob extremarum contranissimum, atque conflictum amittere necesse habent in illas transfundentibus; quo fit ut mediis hinc inde quàm tardissimè dimotis extremæ velocius revolvantur, Itaque cùm extrema puncta B, D partes in contrarium æquâ vi nitantur, neque nisi circa medium punctum Z rotatio peragatur, quod effectant assequi possint, id statim fiet, & reliquæ partes haud gravatim obsequentur. Nè dicani in recta B D nullum aliud punctum existere, cui præ aliis jure prærogativa competit, ut circa ipsum mobile libretur. At pluribus abstinens ad refractionis præcipuam legem haud absimili discursu proliciendam atque declarandam accedo. Hanc nempe:

IV. 6. Radii lucis alteri cuiuspiam dissimili perspicuo (nimirum homogeneo quoad se) incidentes ita refringuntur, ut perpetuò recti sinus inclinationum, quas habent incidentes, proportionales sint rectis sinibus inclinationum, quas obtinent refracti. Huic elucidando, stabilienti quæ decreto; Parallelogrammum A B D C lucis radium representans impingat planæ superficiei E F pellucidi medii (vel sit recta E F sectio communis, ut in casu præcedente, quod & abhinc semper intelligatur) progressum ejus aliquatenus retundentis. Itaque medium isthoc subingrediens punctum B procedere, tardius quidem, attentabit per rectam B G, seu per ipsam A B protractam, intereà verò punctum D in primo durans medio motum suum priorem adurgebit in recta C D H. Hos autem conatus, aliàs irritos futuros (nec enim utrumque potest rectum motum illud tardius, hoc velocius incedendo conservare) quàm proximè consequentur, modò circa punctum aliquod in recta D B producta situm, puta quale Z, rotentur; ita scilicet ut dum punctum D in medio rariore (rarius appello quod minus resistit, aut retardat; ut & densius quod motum magis reprimit, & tardiolem reddit) velocius latum describit arcum majorem D  $\delta$ ; punctum B tardius

tardius in medio contumaciore delatum minorem arcum  $B\epsilon$  delineet; quibus peractis recta  $BD$  tenebit situm  $\epsilon\delta$ . Cum verò jam punctum  $D$  densius quoque medium interet ad  $\delta$ ; proindeque pariter & ipsum retardetur; motus isti circulares protinus extinguantur oportet (nec enim jam punctum  $D$  velocius feretur quàm  $B$ ; nec idè majorem ut priùs simul arcum describet.) Itaque prius iter, quàm poterunt proximè, deferentia tendent utrumque per horum arcuum tangentes  $\delta\kappa$ ,  $\epsilon\alpha$ ; radiùsque totus  $ABCD$  hoc modo detortus, & situm  $\alpha\epsilon\delta\kappa$  nactus per hanc postea semitam recta decurreret. Adnotandum est autem quæcunque sit rectæ  $AB$  ad rectam  $EF$  inclinatio arcus  $D\delta$ ,  $B\epsilon$  (vel semidiametros  $ZD$ ,  $ZB$ ) eandem semper habere proportionem inter se; talem nempe, qualem in densitate, seu resistèntia peculiare discrimen exigit. Etenim supponatur in quovis superficièi pellucidæ loco positum nobile punctum  $B$ ; cùm medium hoc ex hypothesi sit homogeneous (hoc est ubique pariter obfistens) nulla potest, opinor assignari ratio cur hoc mobile non in qualvis partes æquâ velocitate deferri possit; nimirum æquè celeriter ad  $Q$  tender, (impetum modò ceperit isthac dirigentem) per rectam  $OBQ$ , ac in  $N$  per rectam  $ABN$ . Adeoque radii lucidi  $AB$ ,  $OB$  utcunque differenter inclinati parem omnino resistèntiam invenient; punctum, inquam,  $B$ , seu versus  $Q$ , seu versus  $N$  nitatur, æqualiter, eodèmq; modo retardabitur. Quinetiam cùm punctum  $D$  in primo medio semper eadè, quæcunque fuerit ejus positio, celeritate promoveatur, satis apparet motus istos, aut motuum semitas eodem tempore decursas, arcus nempe circulares  $D\delta$ ,  $B\epsilon$  semper eandem inter se proportionem servare; nimirum illam, quam habent semidiametri  $ZD$ ,  $ZB$ , vel  $Z\delta$ ,  $ZB$ ; quæ idcirco proportio, principaliter ac primario, radiorum refractiones, ad eadem duo media factas, determinat atque metitur. Hanc autem eandem esse patet cum illa, quam habent recti sinus angulorum ipsis  $Z\delta$ ,  $ZB$  in triangulo  $Z\delta B$  oppositorum. ipsorum scilicet  $ZB\delta$  (vel  $ZBE$ ) &  $Z\delta B$ . Est autem angulus  $ZBE$  complementum anguli  $ABE$ , (hoc est angulus inclinationis rectæ  $AB$  ad  $EF$ ) & angulus  $Z\delta B$  est complementum anguli  $F\delta\kappa$ , vel inclinatio rectæ  $\delta\kappa$  ad eandem  $EF$ . Igitur abunde liquet propositum. Patet verò, quod in hoc casu, angulus  $EBZ$  major est angulo  $B\delta Z$ ; vel, ductis  $BM$ ,  $\delta N$  ad  $EF$  perpendicularibus, quòd angulus  $MBG$  major est angulo  $N\delta\kappa$ ; adeoque quòd hic refractio versus perpendicularem, quod aiunt contingit. Ac ita quidem quando radius radius in medium transit, ipsi magis obfistens, seu densius. At si medio incurrit faciliorem transitum præbenti, seu rariori, planè simili modo, sed inversè se res habet.

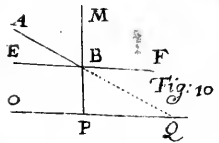
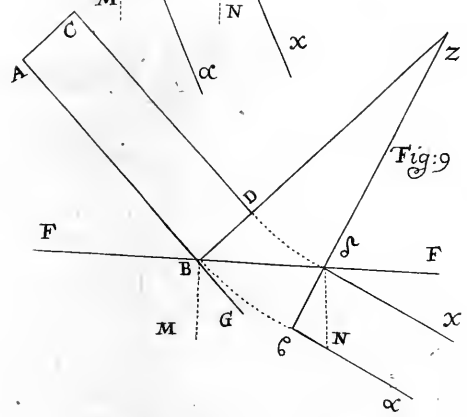
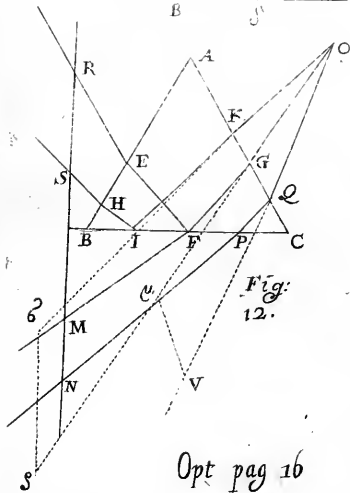
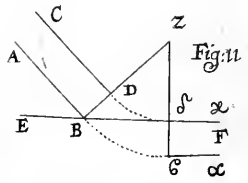
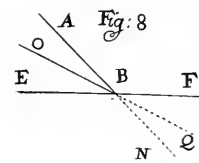
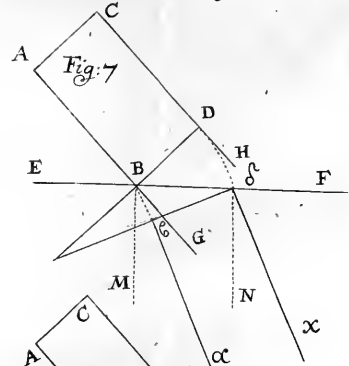
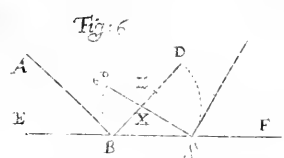
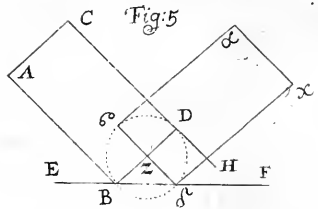
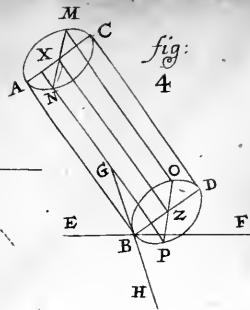
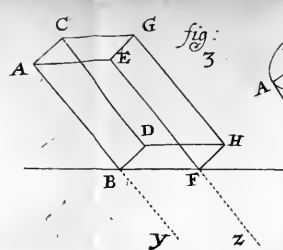
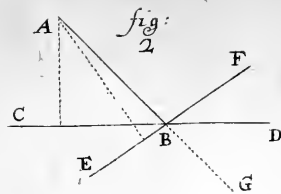
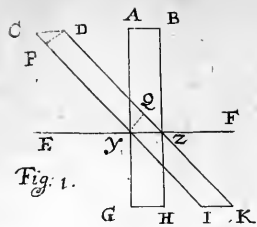
Quod

Fig. 7.

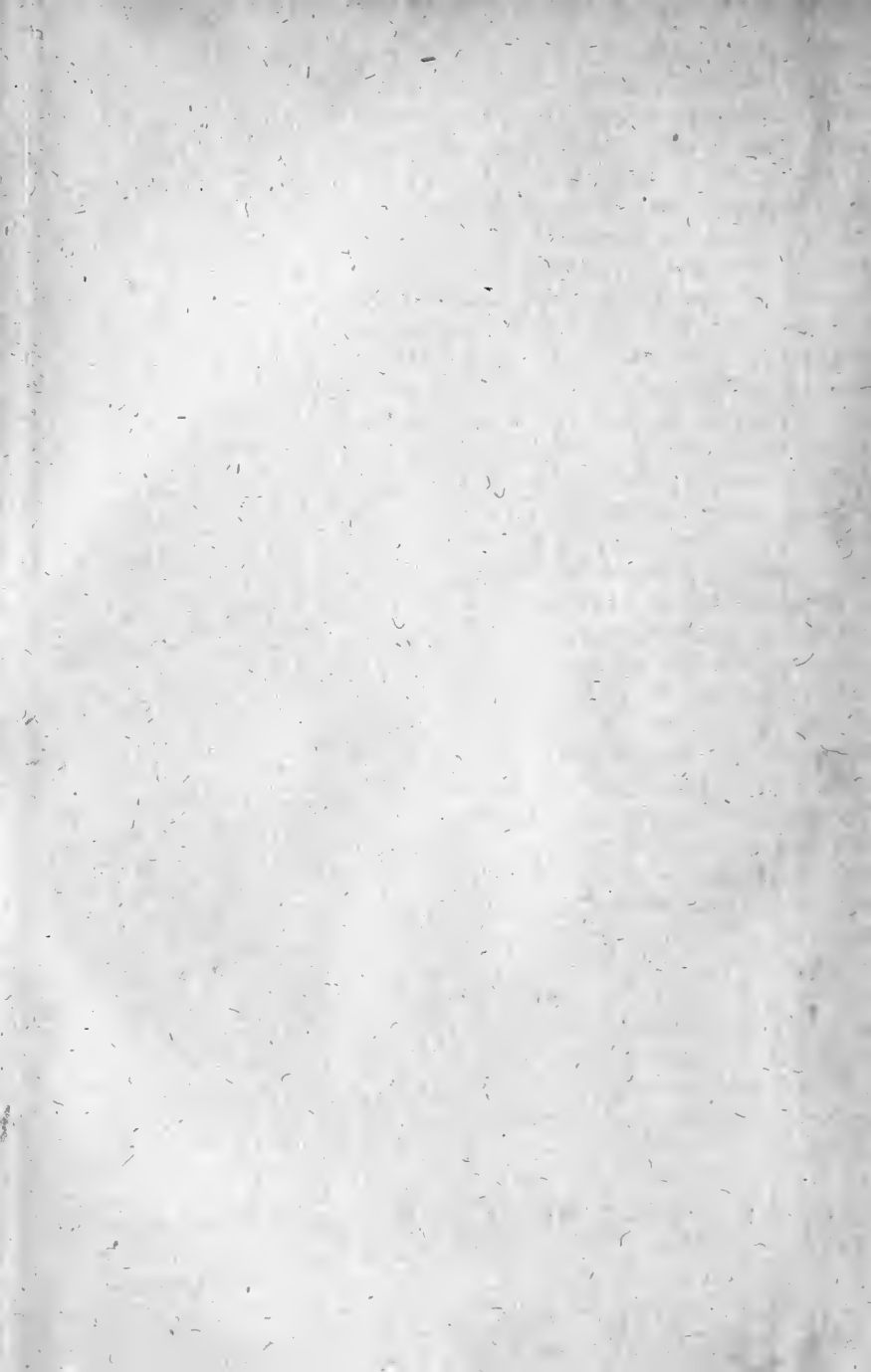
Fig. 8.

Quod (licet brevius) conficeretur negotium adsumendo sicut eadem *Thebis Athenas*, ac *Athenis Thebas* est via, ita radius de raro transeuntem in densius, perque densius vestigia sua replicantem in rarum nil aliud quam eandem semitam repetere; ut nempe si radius  $ABDC$  de raro transiens in densius refringatur in  $\alpha \epsilon \delta$ ; quod etiam hic radius  $\alpha \epsilon \delta$  è densiori recidens in rarum vicissim in  $ABDC$  refringatur; quia tamen assumptum illud non nemini demonstrationis & ipsum indigere videatur; Et universim, extremoque rigore sumptum forsitan haud adeo verum sit; majoris etiam evidentiae causa; praesertimque demum quoniam huic casui nonnulla quodammodo peculiaris sunt notatu non indigna; quin addo quia praestare videtur effectum unumquemque propriis è causis deduci) separatim ostendemus. Rursum igitur radius  $ABDC$ , quâ prius figurâ donatus rarioris medii superficiem  $EF$  incurrat. Cum igitur punctum  $B$  velocius procedere jam valeat quam antea (medio scilicet illapsus promptius cedenti) hoc est quam punctum  $D$ , necessario commutabitur rectus utriusque, quem affectant, motus in ei proximum circulem, circa punctum aliquod in recta  $BD$ , puta circa  $Z$ ; ita ut  $ZD$ ,  $ZB$  talem inter se proportionem observent, qualem singularis exigit horum in resistentia mediorum diversitas; utique sicut in quâ praecesserunt; cum verò punctum  $B$  ita circumductum descriperit arcum  $B\epsilon$ , & punctum  $D$  arcum  $D\delta$ ; puncto  $D$  ad  $\delta$  tunc medium rarius ingredienti, cessabit ista motuum inaequalitas; adeoque simul necessario desinet rotatus circa punctum  $Z$ ; amboque puncta  $B$ ,  $D$  per dictorum arcuum tangentes  $\epsilon \alpha$ ,  $\delta \kappa$  (rectae  $Z\epsilon$  perpendiculares) quod proximum est iter arripient. Rursus autem, pariter ac in casu praecedente, rectae  $ZD$ ,  $ZB$  (vel  $Z\delta$ ,  $ZB$ ) proportionem exhibent, quâ refractiones huiusmodi dimittitur; habent autem  $Z\delta$ ,  $ZB$  seipsas, ut recti sinus angulorum  $ZB\delta$ ,  $Z\delta F$ ; hoc est ut sinus inclinationis rectae  $AB$  ad sinum inclinationis rectae  $\delta \kappa$ ; quod propositum fuit ostendere. Liqueat autem quod hic ang.  $Z\delta F$  major est angulo  $ZB\delta$ , adeoque quod refractus divergit à perpendiculari.

V. Advertendum est porro quoad priorem hypothesein, seu casum radii de medio rariore contententis in densius, eum semper, qualiscunque sit ejus obliquitas, medium densius subire; & per ipsum incedere; modo commonstrato. [Simpliciter autem hoc, & abstractè debet intelligi, nec ut accidentarium quicquam interveniat, qualia sunt, opacitas perspicuitati immista, figura diaphanum terminans, ejus crassities inaequalis, aliud quid post positum diaphani resistentiam promovens; cujusmodi



Opt pag 16





ejusmodi quippe de causis diaphanum subinde forsan evasurum est opacum, & instar opaci radios valebit repercutere; ceu quando lapis in aquam impingit obliquè; cùm hydrargyro substracto vitrum munitur. Dum lapis *e. g.* obliquè impingit superficiei EF (cui parallela OQ) per lineam AB; tota linea BQ ad fundum OQ protensa venienti repugnabit, auxilii quoque nonnihil conferente fundo OQ; neque mirum fuerit, si major hic renitentia deprehendatur, quam ubi radius alter MBP perpendiculariùs incurrit, quando major sit BQ, quam BP.] At nos seclufis istis medium velut interminatum, in omnes partes æqualiter resistens, absolute perspicuum, & radios ex se non respuens accipimus; quibus suppositis perpetuò quod dixi, radius, obliquitate quâpiam incidentiæ nil vetante, medium densius penetrabit. Verum in altero casu, cùm de medio densiori lux rariùs incurrit, non semper ea medium hoc permeabit. Nam si magna satis fuerit obliquitas; subinde radius inflexus supra superficiem EF attolletur, angulûsque (qui dicitur) refractus, aut inflexus rectum exsuperabit; quinimò fieri potest ut ipsum exaquet. Sit in exemplum primò inclinatio graduum 45, vel semirecta; Et ZB ad ZD se habeat ut quadrati diameter ad suum latus quæ fermè proportio radiorum ex aqua in aerem transeuntium, experienciâ contestante, rationem metitur) radius velut in ipsam EF refringetur; aut eam stringens procedet. Est enim Zδ (æqualis ipsi ZD) jam ad EF perpendicularis, adeoque δ \* arcum δD contingens ipsi EF congruet. Unde patet obiter, id quod superius insinuaturn, non universim constare, quod radius à quo loco medii unius in aliud processit, ad eundem retrogradus accedet. Hoc enim saltem in casu radius AB refringitur in  $\epsilon \alpha$  superficiei media dirimenti parallelam; veruntamen qui per  $\alpha \epsilon$  progreditur minjmè recedet ad BA, nec ullam, ut manifestum est, omninò refractionem patietur. Sed hic casus tantum unus, & quasi pro nullo censerì potest. Quod si, servatâ quoad densitatem eadem proportionem, radius AB paullo magis ad rectam EF inclinetur, ejus. Refractus supra ipsam EF assurgit; punctum quippe D rectam EF nunquam pertinget; & punctum B decursâ rariùs intra medium peripheriâ BC in densum remeabit; in quo proinde rursus, circulatione suâ dimissâ, per tangentes  $\epsilon \alpha$ , δ \* ferentur; adeò quidem ut radius ABCD jam reflecti videatur, quatenus medium densius haud penetrat totus, vel egreditur.

Fig. 12.

Fig. 13.

VI. Nec ineptè quidem (etsi quodammodò, velutique primariò, sit refractione) reflectionis nomen adsciscit hac actio, quatenus & ipsa

D

reflectionis

reflectionis leges examussim observat. Nam quoniam isoscelis trianguli  $ZBC$  anguli  $ZBC$ ,  $ZCB$  sunt æquales, etiam anguli (de rectis residui)  $ABE$ ,  $ACE$  pares erunt; quod reflectioni proprium est. Itaque non abs recto pronunciant hoc Dioptrici; neque tamen causam, fortassis ab iis prætermittam, tacere volui, nonnihil ab immediatæ reflectionis causa diversam; nè quisquam hæfaret, aut hoc adsumenti gravetur concedere.

*Repl. prop. 14.*

*Fig. 13.*

VII. Hæc autem doctrina cum multis experimentis utcumque comprobari queat, unum saltem breviter attingam satis illustre, neminisque non examini patens. Esto triangulum  $ABC$  sectio prismatis triangularis æquilateri (nimirum vitrei, seu crystallini) basi parallela; in hujus autem base sumatur punctum quodpiam  $F$ , & sit angulus  $CFG$  circiter graduum 50. (unde juxta doctrinam hic insinuatam, & postea clarius exprimendam, radius  $GF$  velut extremus erit eorum, qui rectæ  $BC$  è vitri partibus illabentes refractionem patientur; eo scilicet obliquior quilibet reflectetur.) Sit igitur (quoniam utramque qualipatitur inflectionem) ejus refractus  $FM$ , reflexus  $FE$ ; item  $FG$  refringatur in  $GO$ , &  $FE$  in  $ER$ . Porro jam in  $GO$  statuatur oculi centrum  $O$ ; & ab eo prodeat radius  $OQ$ , qui refringatur in  $QP$ ; ipsorum  $OG$ ,  $OQ$  refracti  $GF$ ,  $QP$  (uti secundum principia nostra posthac constabit) progredientes divergent; eritque propterea ang.  $QPC = GFC$ ; quare radius  $QP$  medium  $BC$  penetrabit, ac refringetur, puta in  $PN$ ; liquebit autem è dicendis refractos  $FM$ ,  $PN$  à se divergere; Hinc jam radiis  $MF$ ,  $NP$  interpositum objectum radiis  $OG$ ,  $OQ$  interjectum apparebit, velut ad  $\mu\nu$ , situ neutiquam immutatum. Rursus autem ab oculi dicto centro prodeat alter radius  $OK$ , cujus refractus sit  $KI$ ; hic itaque rursus à  $GF$  diverget, ac inde erit ang.  $KIF = \text{ang. } GFC$ ; adeoque  $KI$  minimè penetrabit medium  $BC$ , at reflectetur, puta in  $IH$ , tum  $IH$  refringatur in  $HS$ . Ergo jam radiis  $ER$ ,  $HS$  interjacens objectum puta  $RS$  radiis  $OG$ ,  $OK$  interjectum cernetur, velut ad  $\epsilon\sigma$ , situ partium everso. Consequuntur hæc doctrinam nostram, & experientiæ liquidò consentanea deprehenduntur, quin & observatu dignum erit, è duplici refractione spectatum objectum  $MN$  Iridis coloribus tinctum adparere (rubro scilicet ad  $\mu$ , cæruleo ad  $\nu$ , croceo medium occupante) objecti verò  $RS$  è duplici refractione, sed reflectione tamen intercedente, apprehensi imaginem  $\epsilon\sigma$  colore nihil ab ipso objecto differre. Quod ex eo sanè videtur evenire, quoniam ang.  $FEB$  angulo  $FGC$  æquatur; adeoque radius  $KO$  non aliter è vitro exit, quam  $RE$  ingressus est; seu

feu quicquid retractio ad E effecit, id refraſtio ad K reſexit, radium in ſtatum reſtituens, ei quem ab origine habuit non diſparem. Verum hæc non eſt hujus loci penitiùs excutere, Saltem obſervari meretur hoc præcipuum, ut arbitror, in priſmate Phænomenon.

VIII. Hæc, inquam, cum ab experientia confirmentur, neque tamen ei magis, quam ratiociniis noſtris conſentiant, cauſis tamen adſcribuntur (a quibuſdam) nedum diverſis, at prorſus adverſis. Quod enim vitrum e. g. radios intra corpus ſuum receptos, ejuſque poſticæ ſuperfici ei obliquius incidentes retrocedere cogat, huiuſmodi rationem exhibent : aiunt vitrum radios faciliùs admittere, vel transmittere quam aërem ; quin addunt aërem vi reflectendi prævalidâ pollere ; quodque proinde qui poſt vitrum adventanti radio ſit obviuſ aër cum reverberat. Quæ ratio mihi non adblanditur. Nam imprimis rei naturæ minùſ conſentanea videtur. Quum enim aëriſ corpus ex æthere puro maximam partem, è corpusculis terrenis, & ex halitibus aqueis conſtare totum videatur ; ex hiſ partibus æther, opinor, non minùſ promptè quam vitrum radios transmitti ; aqua verò ſaltem (ex illorum, quibuſcum diſputamus, ſententiâ) tantillo difficiliùſ ; adeoque neutiquam harum alterutri dicta reflectio jure videtur attribuenda ; terreſtres autem particulæ (quæ præ reliquis etiam pauciores videntur, & rariùſ interſperſæ, præſertim in aëre ſudo ſummiſque montium excellorum jugis) ſunt opacæ, nec lucem admittunt, aſt eam in omnique pariter incidentiâ reſciunt ; adeo ut nec ad haſ quam reſpicimus lucis infectio propriè ſpectet, ergo nihil ſubſeſſe videtur cauſæ, cur aër (præ vitro) ingruenti luci potentius obſiſtat. Addo ; ſi talis aëri viſ reflexiva competat, & vera ſit, quam hi Philoſophi memorato Phænomeno cauſam adlignant, conſequi videtur, ut nulla prope Horizontem Stella conſpici poſſit (admiſſo ſaltem hoc, non inverecundo reor, ut plerique viſum erit, poſtulato ; quod puruſ Æther, naturale lucis vehiculum, aëreæ regioni ſuprajactus haud minùſ facile quam vitrum aut aqua radios intromittet.) Sit enim C terræ centrum, O oculus, S viſibile punctum longinquum, ceu ſtella, ſitum in Horizonte ; per puncta verò C, O, S trajectum concipiatur planum faciens in terræ ſuperficie circulum OP ; in atmophæaræ, vel aëriſ circumfuſi, extima ſuperficie circumferentiam ZNM ; itaque cum radius quilibet, ut SM, vel SN (Horizontalis puta, vel eo ſuperior) in ſuperficiem MZ cadens ei incidat perquam obliquè (niſi ſaltem atmophæaræ Semidiameter CZ præ telluriſ Semidiametro CO dicatur enormiter, & incredibiliter magna) cum & aër idcirco, juxta ſententiam quam ex-

Fig. 14.

pendimus, lucem admittere non debeat; omnino dicti radii  $SM, SN$ , & confimiles reflectentur, & extra atmosphæram procul abeuntes oculum non pertingent. Quinimò satis constare videtur exhinc, quòd radii quales  $SN$  ut visum afficere queant, aut accedere, versus perpendiculararem  $NC$  refringi debent; id quod adversariæ Hypothesi pariter adversatur. Verùm hæc obiter, ac in transcurso dicta sunt.

IX. Porro, subnotandum est, quoad binos casus suprâ tractatos, cum duo media, diversimoda comparandò duæ se representent proportionēs, altera, terminorum situm transponendo, alterius inversa, refractionum ideò mensuras (quoad hæc) iisdem terminis designabiles ordine permutari. Ut si in primo casu sinus rectus anguli incidentis se habeat ad sinum rectum anguli refracti, sicut  $A$  ad  $B$ , in secundo sinus incidentis ad sinum refracti se inversè habebit ut  $B$  ad  $A$ ; nimirum in præcedentibus figuris, quanto  $ZD$  major est quàm  $ZB$ , in prima Hypothesi; tanto constat  $ZD$  minorem esse quàm  $ZB$ , in secunda; mediis scilicet iisdem permanentibus.

X. Denique, cum medii cui radius impingit superficiem hætenus adsumpserimus planam, advertendum superest, quamvis illa curva sit, eodem tamen absque sensibili discrimine sese modo rem habere, ac si plano curvam superficiem isthic, ubi radius occurrit, contingenti impingeret. Incidat nempe radius  $ABCD$  in curvam lineam  $QBR$ , quam ad incidentiæ punctum  $B$  tangat recta  $EF$ . Prorsus eodem modo refringetur iste radius ad curvam  $QBR$ , quo ad rectam  $EF$ , nisi quòd isthic arcus  $D\delta$  in rariori medio decursus tangentem aliquousque prætergreditur. Id quod eximiam radii subtilitatem considerando, quàmque perexiguo distet intervallo punctum  $\delta$  à curvæ vertice  $B$ , nullam omnino sensibilem (imò nec imaginabilem) inducet differentiam. Quan illus enim iste circulus esse debet, in quo chorda  $B\delta$ , radii latitudine paullo major, arcum subtendet aliqua cum ejus sensibili parte comparabilem? potest igitur angulus  $ZB\delta$  æqualis supponi angulo  $ZBF$ ; quo concesso reliqua fluent eodem tenore, quo præcedentia. Quin unâ rationem exhibuimus suppositionis, quæ passim ab Opticis accipitur; ita tamen precario, non ut subinde nullum in audientibus scrupulum relinquat; nec ut semper ad sensum firmo concedatur.

XI. Ità primarias istas circa radiorum inflectionem Hypotheses (vel Axiomata nautis, aut Theoremata) quibus omnis incumbit Optica cuiuscunque

cujuscunque generis scientia, qualitercunque declarare studuimus, & è principiis admodum affinis elicere; modo, meâ sententiâ saltem, omnium qui legenti se vel cogitanti suggesserunt, simillimo veri, cûmque tam rationibus Mechanicis, quàm experimentis Physicis, & cûm ipsa rerum natura congruentissimo. Neque nulla mihi tunc oboriebatur voluptas, cûm postquam inter alios ista lucis symptomata explicandi modos hic ipse semet ingesserat, eum examini subiciens, Geometriæ legibus (aliquanto sanè præter expectationem) adeò quadrantem comperissem. Meæ tamen eum tam fusè diducendi pepercissem operæ, si quæ doctissimus *Maignanus* hisce conformia, luculentius quidem opinor & accuratius, pertractavit, priusquam hæc aggrederer contigisset inspexisse; penes quem extare multa nil dubitem (nec enim eum adhuc curiosius evolvi) supplendis his, & confirmandis accommodata. Porro fuit etiam animus, alias, quæ plurimæ traduntur, horum rationes percensere, ac perstringere (quarum mihi nonnullæ crassâ petitione laborare; multum aliæ à re proposita abludere; quædam animum subtilitate potius confundere, quàm vi constringere videbantur) verum etiam huic exponendæ nimisquam immoratus, hætenus insinuat contentus, omnes transiliam; illius saltem eruditissimi viri nefas fuerit non astipulari penitus, & acquiescere decreto; “qui, De-  
 “um unicum & Optimum Naturæ Architectum, hanc (ait) legem ra-  
 “diis diversa media permeantibus præscripsisse; ut omnes omnino  
 “radii veri, & apparentes eandem semper inter se servant analogiam.  
 His, inquam, dimissis, succedit ut è præstructis emanantia quædam Porismata subnectamus.

---

## LECT. III.

I. **H**ypotheses Opticæ primarias, & fundamentales quasi leges exposuimus hætenus, & excussimus quomodocunque : Sequitur jam ut ex iis emergentia quædam (ad apparentiarum causas tam verè quàm expeditè discernendas conducentia) subjungamus corollaria ; de cæteris quæ faciliora videntur, aut usum præ se ferunt potissimum feligentes. Radios autem jam consideramus, ut unicâ dimensione præditos (siquidem reliquæ, quibus Physicè gaudent, parùm faciunt ad computationes hic institutas) ut lineas, inquam ceu vulgò fit, rectas concipimus à lucido quolibet aut aspectabili puncto dimanantes. Quin & cum, hoc admissio, singuli cujusque radii inflectio in superficie peragatur ad planum inflectens recta (uti constat è præmissis) cum & nobis præsertim mox institutum sit singulorum punctorum radiationes consequentia symptomata sic expendere, ut locos ipsorum apparentes determinemus, oculi respectu centrum habentis in ejusmodi plano uspiam constitutum ; pro planis ubique rectas lineas, pro Sphæricis superficiebus peripherias circulares, pro reliquis lineas respectivè congruas, brevitati consulentes & perspicuitati, substituemus. Porro cum quo præcisè modo peragatur visio, quibûsque prædita sit affectionibus adhuc expositum non sit ; Et de illa tamen subindè crassius aliquid ac generalius dicendis intexere fortassis ex usu fuerit, illa saltem pervulgata, post hac curiosius expendenda, jam *προλεπτικώς* adsumemus ; nempe : Visibile punctum in illo radio situm apparere, qui procedens ab ipso (directè vel inflexè) centrum oculi permeat ; proindèq; situm objectorum è radiorum ita transeuntium positione judicari. Majora, minora, vel æqualia videri objecta, prout ipsorum extrema puncta radiis cernuntur angulos ad oculi centrum respectivè majores, minores, aut æquales constituentibus ; distinctam unius cujusque puncti visionem radiis effici modo naturali, hoc est, divergentèr, oculo illabentibus ; Et siqua sunt his agnata pariter obvia, seu manifesta. Quinetiam, verborum parci, vocabulis passim receptis & usitatis definiendis aut explicandis abstinentes, ipsorum supponimus intellectum.

etum. His utcumque majoris evidentiae causa, praelibatis, ad corollaria quae diximus exponenda nos conferemus e vestigio.

II. Imprimis autem (posthac quidem in decursu, quoad plures sibi parallelos, aut ab eodem puncto divergentes (vel in idem convergentes) & huic vel illi singulari, quae tractanda veniet, superficiei incidentes (radios, singularia quotvis inflexos designandi compendia, radiationibus organicè examinandis profutura, tradituri) generales nunc aliquos incidenti cuivis proposito competentem inflexum assignandi modos proponemus; quorum adhiberi possit, qui rei natae videbitur accommodatior. Pro reflectione. Incidat radius  $AB$  ad  $B$ ; Et per  $B$  ducatur  $QB$  reflectenti perpendicularis; & fiat  $\text{ang. } \alpha BQ = \text{ang. } ABQ$ , vel per  $B$  ducta sit  $EF$  reflectentem tangens; & fiat  $\text{ang. } \alpha BF = \text{ang. } ABE$ ; liquetque factum esse, modo utrovis, quod requirebatur. Pro refractione vero; ducatur  $QB$  refringenti perpendicularis, & super diametrum (in hac liberè sumptam)  $QB$  describatur semicirculus, incidentem  $AB$  secans in  $R$ ; tum adjunctâ  $QR$ , factoque  $I.R :: QR.T$  (terminis autem  $I, R$  hic & dehinc perpetuò proportio refractiones metiens indignatur) circulo  $QRB$  adaptetur  $QS$  ipsam  $T$  exaequans; erit connexa  $SB$  protracta nempe) incidentis  $AB$  refracta. & Vel: per incidentiae punctum  $B$  ducatur  $EF$  refringentem contingens; & in hac utcumque sumpta  $BK$  sit circuli diameter, incidentem  $AB$  secantis ad  $R$ ; & fiat  $I.R :: BR.T$ ; & adaptetur  $BS = T$ ; erit  $SB$  & ipsius  $AB$  refractus: Vel demum: In ipsa  $AB$  sumptâ utcumque diametro  $RB$ , super hac descriptus circulus secet perpendicularem  $QB$  ad  $Q$ ; vel tangentem  $EF$  in  $K$ ; fiatque  $I.R :: BK.T$ . & adaptetur  $QS = T$ ; erit rursus  $SB$  & incidentis  $AB$  refractus. quorum ratio e positis inflectionum legibus admodum est manifesta. verba piget impendere.

Fig. 16.  
Fig. 17, 18,  
19.

III. Radii cujusvis incidentis inflexus inflexi vicissim incidens evadet.

Hoc plerique, diversè paullò prolatum, accipiunt; aut postulant. è praemistis autem facillimè colligitur. Idque potius methodi gratiâ (sicut & nonnulla quae sequentur) quàm quia res meretur, ostendemus. Pro reflectione; Radius  $AB$  speculo  $EF$  impingens reflectatur in  $B$ ; dico radium  $B$  permutatim in  $BA$  reflecti. Nam quoniam  $AB$  incidens reflectitur in  $B$ , erit  $\text{ang. } \alpha BF$  æqualis angulo  $ABE$ . Posito jam  $\alpha B$  incidere, etiam angulus quem facit ejus reflexus cum  $BE$  æquabitur angulo  $\alpha BF$ ; proinde non alius erit ab ipso  $ABE$  quare  $BA$  ipsius  $\alpha B$  reflexus erit.

Alb. x. VII. 4.  
Herig. Catop.  
Axiom. 2  
Fig. 1. 16.

Pro

Fig. 20.

Pro refractione vero : Incidat radius  $AB$  medio  $EF$  in  $B$  ; & isthic refringatur in  $B\alpha$  ; dico permutatim radii  $\alpha B$  regredientem in  $BA$  refringi. Nam per occursum  $B$  ducatur  $QBP$  media dirimenti  $EF$  perpendicularis ; & in hac utcumque sumpto puncto  $P$  ducatur  $PG$  ad  $AB$  protractam perpendicularis, ut &  $PH$  ad  $B\alpha$  ; & producat  $\alpha BS$ . Est ergo  $PG$  sinus rectus anguli incidentiæ  $ABQ$  ad radium  $BP$  ; &  $PH$  sinus anguli refracti  $QBS$  ad eundem radium  $BP$ . Cum itaque ratio  $PG$  ad  $PH$  refractionem metiatur è superiori medio factam in inferius ; etiam vicissim rectarum  $PH$ ,  $PG$  proportio refractionem determinabit ab inferiori medio factam in superius. Unde si radius  $\alpha B$  jam ponatur incidens ; cum sint  $PH$ ,  $PG$  recti sinus anguli incidentiæ  $PBH$ , & anguli  $PBG$ , liquidum est ipsam  $HB$  in  $BA$  refringi.

IV. Angulo incidentiæ majori major competit angulus inflexus. (Angulum inflexum vocito, qui à perpendiculari continetur & inflexo ; is proinde respectivè dicitur angulus reflexus, vel refractus. Angulus autem inflectionis (hoc est reflectionis respectivè, vel refractionis) appellatur is, qui comprehenditur ab incidente & inflexo ; incidentiæ verò, nè quis secus accipiat, apud nos angulus est, quem continent incidens & perpendicularis.) Quod propositum spectat effatum, id è positis principiis manifestè consecratur. Etenim in reflectione ipsi anguli reflexi angulis incidentiæ proportionales sunt ; in refractione saltem recti sinus angulorum refractorum sinibus angulorum incidentiæ proportionantur. Unde liquidò constat propositum : quorsum verba, quorsum Schemata multiplicem ?

V. Cum incidentes ad superficiem mediam sese decussant, iidem sese inflectionem passî decussabunt, eodem ordine servato quem directè progredientes habuissent (utique sic ut perpendiculari post inflectionem propior incedat qui propior antea fuit.)

Hæc propositio reverà non differt à præcedente ; quò demirer Herig. Diop. 8. eam à non nemine principia nostra usurpante aliunde comprobari.

VI. Angulo incidentiæ majori major convenit angulus inflectionis. Quoad reflectionem, res extra dubium evidens est ; angulus enim reflectionis incidentiæ majori conveniens eum planè continet, qui minori incidentiæ respondet. Pro refractione vero : sit recta  $QBP$  refringenti perpendicularis ; incident autem radii  $ABG$ ,  $DBH$  (scilicet  $AB$  obliquius



obliquius quàm D B.) Horum verò refracti sint B  $\alpha$ , B  $\delta$ ; dico angulum  $\epsilon$  B  $\alpha$  majorem esse angulo H B  $\delta$ . Nam ad B P in perpendiculari liberè sumptam diametrum constituatur semicirculus B G P; cui occurrant ipsæ A B, D B protractæ ad G, H; nec non ipsæ B  $\alpha$ , B  $\delta$  punctis  $\alpha$ ,  $\delta$ . Fiat autem angulus G B K æqualis angulo H B  $\delta$ , vel arcus G K arcui H  $\delta$ ; connectatur etiam recta  $\delta$  G, secans ipsam P K in X; ducaturque denuò subtensæ G  $\delta$ , H  $\delta$ . Jam ob angulos P G  $\delta$ , P H  $\delta$  pares (arcui quippe P  $\delta$  insistentes ambos) & angulos G P K, H P  $\delta$  ex constructione quoque pares, erunt triangula G P X, H P  $\delta$  inter se similia. Quapropter erit P G . P X :: P H . P  $\delta$ . est autem à lege refractionum P H . P  $\delta$  :: P G . P  $\alpha$ . quare P G . P X :: P G . P  $\alpha$ : unde P X = P  $\alpha$ . est autem P X minor quàm P K (quia tota subtensa G  $\delta$  intra circulum jacet.) Quare P  $\alpha$  minor est quàm P K; adeoque P K secabit angulum G P  $\alpha$ . quamobrem arcus G  $\alpha$  major erit arcu G K, hoc est arcu H  $\delta$ . & idcirco major erit angulus G B  $\alpha$  angulo H B  $\delta$ : Q. E. D.

Fig. 21.

Fig. 22.

Procedit hæc demonstratio quoad casum, ubi I  $\sqsubset$  R (vel cum radius è medio rariori densius ingreditur) at exinde quoad alterum quoque casum faciliè deducitur conclusio. Nam si vicissim  $\alpha$  B,  $\delta$  B concipiantur incidentes, erunt ipsæ B A, B D earum refractæ; ac etiamnum anguli  $\alpha$  B G,  $\delta$  B H erunt anguli refracti.

Hujusce Theorematis apud *Herigonium* habetur alia demonstratio. Confer sodes, & utramvis elige. Nos quam res obtulit posuimus.

Diop<sup>t</sup>. Prop. 4.

VII. In isto refractionis casu, quum I minor est quàm R, si anguli incidentiæ, puta anguli D B Q, rectus sinus P H, ad sinum totum se habeat ut I ad R; nullus incidente D B obliquior radius medium E F refractus ingreditur, aut penetrabit.

Fig. 23.

Nam penetret (si fieri potest) obliquioris alicujus A B G refractus B  $\alpha$ . Erit ergo P G . P  $\alpha$  :: (I . R ::) \* P H . P B. est autem P G major quàm P H. ergo P  $\alpha$  major erit quam P B. quod planè fieri nequit. Ergo A B non refringetur in medium ipsi E F subiectum.

\* Hypoth.

VIII. Angulus incidentiæ major ad angulum suum refractum majorem habet rationem, quam angulus incidentiæ minor ad refractum suum.

Erit scilicet (in figura numeri Sexti, cujus huc apparatus transferratur) ang. G B P .  $\alpha$  B P .  $\sqsubset$  ang. H B P .  $\delta$  B P. Nam triangula

Fig. 21, 22.

E

G P  $\alpha$ ,

GP  $\alpha$ , HP  $\delta$  ità disponantur, ut latera PG, PH sibi congruant (unde major angulus GP  $\alpha$  minorem HP  $\delta$  comprehendet) tum centro P per  $\delta$  describatur circulus E  $\delta$  F ipsas PG, P  $\alpha$  secans punctis F, E; item connexâ EH, centro H per  $\delta$  transeat circulus H M N ipsas HP, HE secans punctis N, M; denuò connexa E  $\delta$  cum PG conveniat in L. Estque jam ang.  $\alpha$  P  $\delta$ , ang.  $\delta$  PH :: sector EP  $\delta$ , sector  $\delta$  PF  $\sqsubset$  triang. EP  $\delta$ , triang.  $\delta$  P L :: E  $\delta$ ,  $\delta$  L :: triang. EH  $\delta$ ,  $\delta$  HL  $\sqsubset$  sector MH  $\delta$ , sector  $\delta$  HN :: ang. EH  $\delta$ , ang.  $\delta$  HP. est igitur ang.  $\alpha$  P  $\delta$ , ang.  $\delta$  PH  $\sqsubset$  ang. EH  $\delta$ , ang.  $\delta$  HP. ergoque compositè ang.  $\alpha$  PG, ang.  $\delta$  PH  $\sqsubset$  ang. EHP, ang.  $\delta$  HP. permutandoque ang.  $\alpha$  PG, ang. EHP  $\sqsubset$  ang.  $\delta$  PH, ang.  $\delta$  HP. est autem HP, PE :: HP, P  $\delta$  :: I, R :: GP, P  $\alpha$ . adeoque EH ad  $\alpha$  G parallela; vel ang. EHP = ang.  $\alpha$  GP. ergò erit ang.  $\alpha$  PG, ang.  $\alpha$  GP  $\sqsubset$  ang.  $\delta$  PH, ang.  $\delta$  HP. hoc est ang.  $\alpha$  BG,  $\alpha$  BP  $\sqsubset$  ang.  $\delta$  BH, ang.  $\delta$  BP. vel componendo, ang. GBP, ang.  $\alpha$  BP  $\sqsubset$  ang. HBP, ang.  $\delta$  BP. Quod erat demonstrandum.

*Corol.* 1. Ang.  $\alpha$  BG, ang.  $\alpha$  BP  $\sqsubset$  ang.  $\delta$  BH, ang.  $\delta$  BP.  
2. Ang.  $\alpha$  BG, ang. PBG  $\sqsubset$  ang.  $\delta$  BH, PBH.

Opportunum est hoc Theorema conciliandis cum experientia propositis refractionum legibus. Ut demirari subeat nuperrimum Opticæ scriptorem, virum alioqui diffusè doctum, hujusmodi ratiocinio leges istas impugnasse: “In majoribus tamen angulis inclinationis (ipsius-  
“sima sunt ejus verba) falsum esse constat (principium nempe no-  
“strum; ) in his enim angulus refractionis major est subtriplo an-  
“guli inclinationis; quod mihi aliisque ex luculentis experimentis  
“compertum est. Hæc, inquam, ille τανυστι. Quasi verò dixisset;  
numeri 6 & 4 simul accepti non conficiunt 10, quia numerum effici-  
unt majorem quam 8. planè similis est discursus; non ovum ovo si-  
milis. Nam in refractionibus ex. gr. ad vitrum factis si ponatur ad  
quamvis inclinationem (puta graduum 15) quòd sit angulus refra-  
ctionis subtriplus anguli inclinationis (quem ille vocat, incidentiæ nos  
angulum appellare solemus) necessario, sicuti modò demonstratum  
est, è principio nostro consequetur, quòd ad aliam quamcunque ma-  
jorem inclinationem refractionis angulus major erit subtriplo anguli  
inclinationis; nominatim acceptâ graduum 30 inclinatione juxta di-  
ctum principium institutus calculus angulum præbebit refractum  
19. 24'; angulúmque proinde refractionis 10. 36', qui 30 graduum  
trientem exuperat. Quare cum Clarissimus vir Hypothesin hanc (à  
Cartesio

*Cartesio* quidem primò repertam, sed ab aliis plerisque recentioribus opticis *Mersenno*, *Herigonio*, *Hobbio*, *Maignano*, quin & ipso ejus confodale doctissimo *Ricciolo* susceptam & approbatam; quam & certè hujus Scientiæ non parùm interest veram deprehendi) labefactatum iret; eam potius imprudens experienciæ Suffragio communivit. Quinimo si quid insit huic principio vitii, illud potius erit, quod in maximis inclinationibus refractionis angulos exhibet apparentibus aliquantillo majores; quæ tamen discrepantia num ipsius legis hujus, an experimentorum defectui, vel accidentariis quibusdam intervenientibus causis adscribi debeat, haud facilè pronunciaverim. Nec enim fortassis cognata reflectionis lex, à nemine non admissa, experimentis omnibus præcisè responderet. Nobis sufficiet quòd in reliquis inclinationibus, mediis præsertim, dicta lex experienciæ, quam præferunt authores, perquam consentanea reperitur; addo, quòd ab ea deductæ conclusiones cum experientia mirè conspirant; nec ab ea quòd animadvertere potuerim, unquam discordant. Eam proinde (cùm alia probabilis haud suppetat, Geometricis, ratiociniis præsternenda) non verebimur ubivis ut ratam sumere, ac adhibere; satis certi (apud nos saltem) in elicitis ab ea conclusionibus haud omnino quicquam notabilis erroris emersurum.

IX. Obiter hîc & *παραβάνης* problemation quoddam inseram Fig 21.  
(quia Schema num. 6. superius ei gratis inserviet, ejusque constructio è superiore constructione derivatur.) Per datum in refringente punctum (B) incidentem ducere; cui datus conveniat angulus refractionis. Ducatur B P refringenti perpendicularis (hanc autem duci posse supponimus, aut postulamus) & ad diametrum B P construatursemicirculus; & sit utcumque  $PG \cdot Pa :: I \cdot R$  (pro P G verò præstat ipsam diametrum P B accipere) sumaturque Arcus G K subtendens angulum parem dato. Fiat autem  $PX = Pa$ . & per G, X ducta recta circulo occurrat in  $\delta$ . demum accipiatur Arcus  $\delta H = GK$ , erit ductæ B H refractus B  $\delta$  (uti præcedentem discursum invertendo non difficilè colligitur) adeoque liquet factum esse quod erat propositum. Hoc præter ordinem; ergo perfunctoriè.

X. Cujuscunque generis lineæ R B S incidat radius M N O ad N, Fig. 24, 25.  
sitque dictæ lineæ perpendicularis recta N C; & in hac utcumque sumpto puncto C, per hoc transeat incidenti parallela C B; quâcum conveniat ipsius M O inflexus G N K; erit in reflectione  $KN = KC$ ; in refractione verò  $KN \cdot KC :: I \cdot R$ . (vel item, si in ipso inflexo  
F 2 sumatur

sumatur utcumque punctum K; & ab eo ducta KL ad perpendicularem CN parallela cum incidente conveniet ad L, erit illic  $KN = NL$ ; & hic  $KN.NL :: I.R.$ .)

Fig. 24, 25.

Nam 1. in reflectione; quoniam ang.  $ONC = KNC$  (ex lege reflectionis.) Et ang.  $ONC = KCN$  (ex Hypothesi quod ON, CB parallelæ sunt) erit ang.  $KCN = \text{ang. } KNC$ . adeoque  $KN = KC = NL$ : Q.E.D.

2 In refractione; ducantur CE ad NO, & CF ad NK perpendiculares (unde liquet puncta E, F existere in circulo super diametrum CN descripto) quare, connexâ EF, erunt anguli  $CEF = \text{ang. } FNC$  (eidem insistentes peripheriæ FC) æquales. Item propterea est ang.  $ECF = \text{ang. } FNE = \text{ang. } NKC$ . quare triangula ECF, NKC sunt æquiangula sibi mutuo; quamobrem est  $CE.CF :: KN.KC$ . atqui (juxta legem refractionis) est  $CE.CF :: I.R.$  qua propter erit,  $KN .. KC :: I.R.$  vel  $KN.NL :: I.R.$ : Q.E.D.

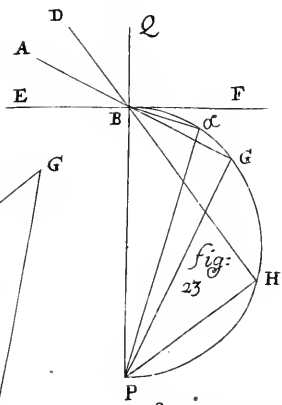
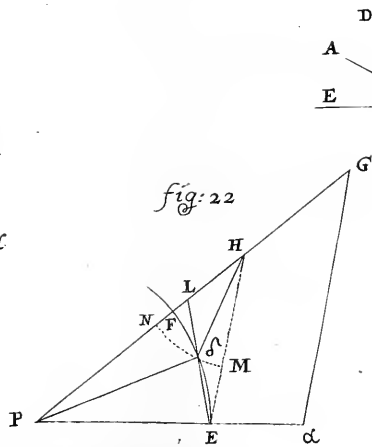
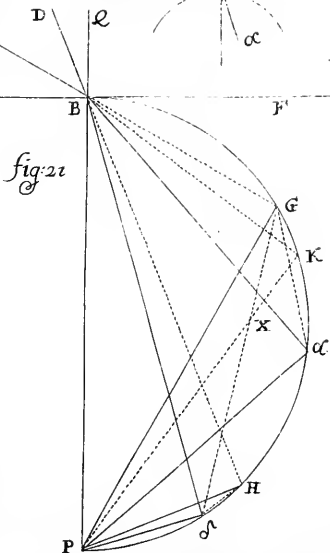
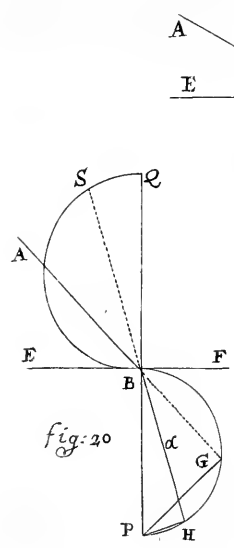
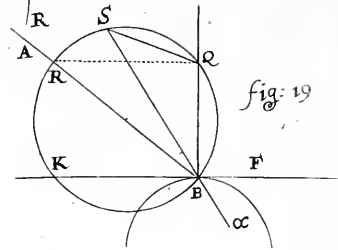
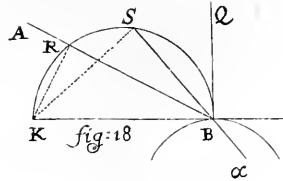
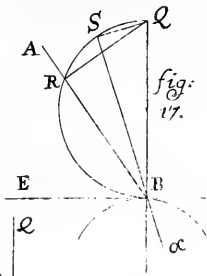
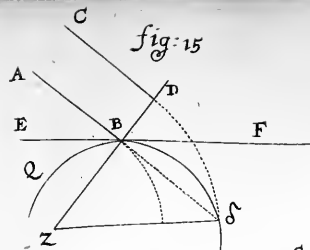
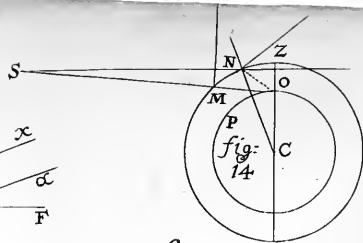
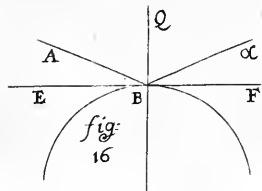
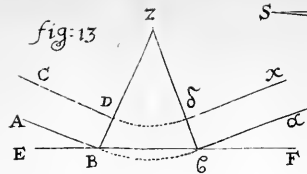
XI. Quod si per N ducatur tangens UT, erit (in reflectione) etiam  $KT = KN$ ; & NT angulum MNK bisecabit. In refractione verò erit KT ad KN, ut co-sinus anguli refracti, ad cosinum anguli incidentiæ. Quæ saltem ad noto, ceu Lemmatica.

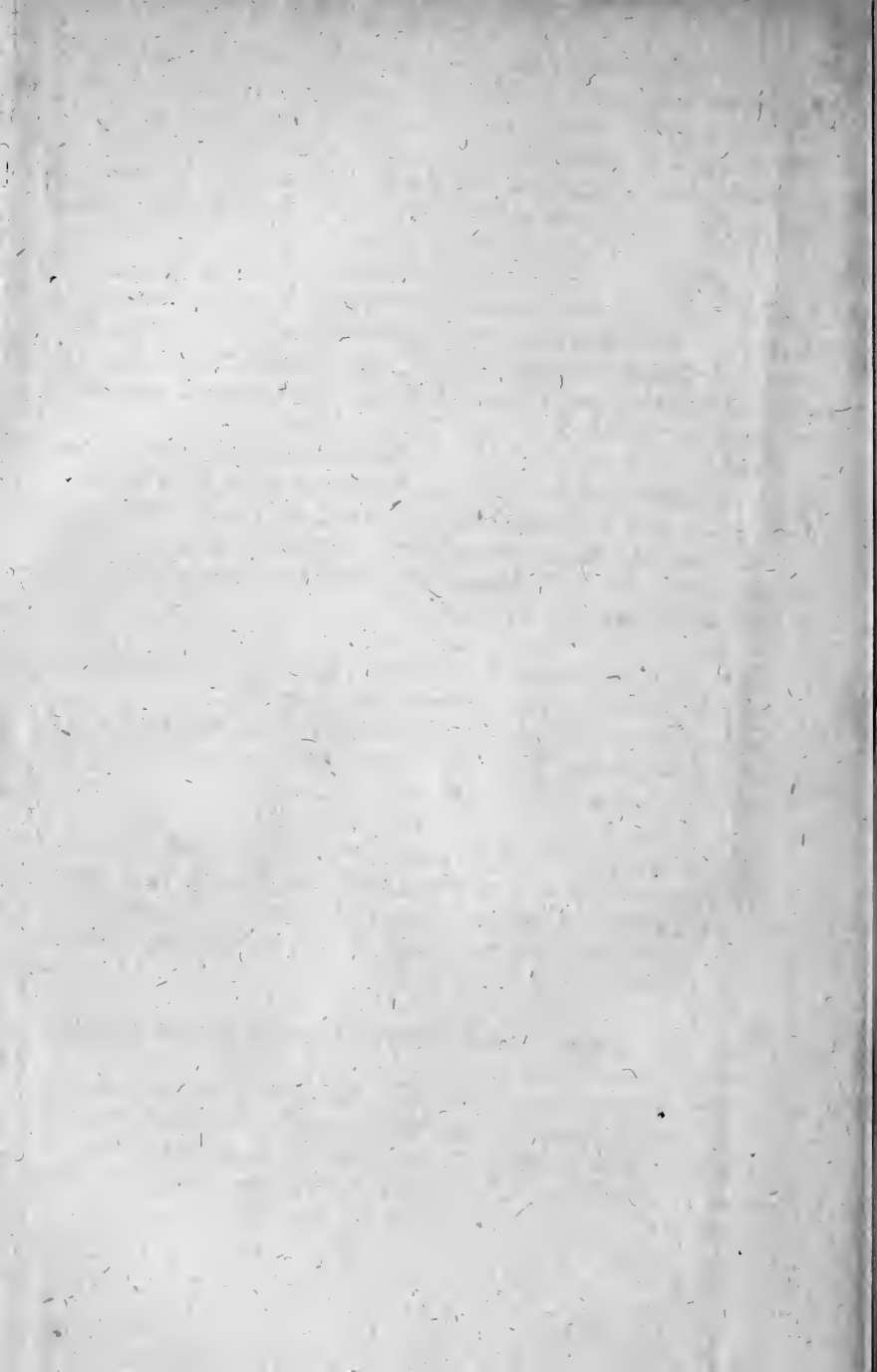
XII. Exhis facilè deducantur Conicarum Sectionum circa radiorum inflectionem satis jam pervulgatæ proprietates; at quæ fortassè per nimias ambages.

1. Demonstratæ prostant. Ut in parabola (puta RBS, cujus axis BC) incidat MNO axi BC parallelus; ejusque reflexus sit NK; erit igitur (ex ostensis)  $KN = KC$ . at si punctum K ponatur umbilicus parabolæ; erit etiam indè (juxta notissimam hujusce curvæ proprietatem)  $KN = KC$ . quare paralleli radii reflexus necessariò per umbilicum transibit; qui propterea non immeritò quoque *focus* appellatur.

Fig. 26.

2. Item in ellipse, cujus axis BD, foci H, K, si ad quodvis curvæ punctum N à focis ducantur rectæ HN, KN; satis celebre est, quod perpendicularis CN angulum HNK bisecabit. Unde  $NH.NK :: HC.CK$ . & componendo  $NH + NK.NK :: HK.CK$ . vel  $BD.NK :: HK.CK$ . vel permutando  $BD.HK :: NK.CK$ . quare si talis fuerit ellipsis, ut sit  $BD.HK :: I.R.$  etiam erit  $NK.CK :: I.R.$  verum si incidens MN ad BD parallelus refringatur in NK; erit (juxta mox ostensa) etiam  $NK.CK :: I.R.$  patet itaque quod ipsius MN refractus per focum K transibit. Quid plura?





3. Non absimiliter in *Hyperbola*, (cujus itidem axis B D, foci H, K, reliquisque velut antea præparatis) ostendetur fore perpetuò N K. C K :: B D. H K. unde si fuerit (ex *Hyperbola* constructione) B D. H K :: I. R. erit etiam N K. C K :: I. R. quòd si radius M N ad C B parallelus refringatur in N K; hoc idem accidet, ut nempe sit N K. C K :: I. R. quare radii M N refractus per *Hyperbola* focum transibit.

Fig. 27.

4. Quòd verò ab *Ellipsis* aut *Hyperbola* cujusvis focorum alterutro quilibet curvæ incidens radius in alterum reflectatur, admodum faciliè dilucescit. Nam in ellipse, perpendicularis N C, in *Hyperbola*, tangens N T bisecat angulum H N K. unde patet propositum, Hæc extra nostras oleas posita cursim & levissimè perstringo; nec tamen ut eò multa putem desiderari.

Revertamur in orbitam; & quidem derelictis his generalissimis, ac abstractissimis, lemmatum vicem obituris, ad particularia descendamus. Ad planas verò superficies (vel earum loco propter insinuatam antehac causam, subrogatas lineas rectas) inflexis obtingentia radiis primò contemplemur. Etiam quoad has Catoptrici primum, utpote facillimis, brevissimè defungemur.

XIII. 1. Parallelorum sibi radiorum (A B, M N) rectæ (E F) incidentium reflexi (B α, N μ) sunt etiam sibi paralleli.

Fig. 28.

Nam quoniam A B, M N ex hypothesi sunt paralleli, erunt anguli A B E, M N E pares. Ergò sunt anguli α B F, μ N F etiam pares. Quare rectæ α B, μ N sunt parallelæ.

XIV. 2. Sit recta A B Z rectæ reflectenti E F perpendicularis; cum hac verò promanantis ab A cujusvis radii A N reflexus α N conveniat in Z; dico fore B Z = A B. Nam ang. A N B = ang. α N F = Z N B. quare liquet triangula B N A, B N Z sibi mutuo æquilatera fore; & esse A B = B Z: Q. E. D.

XV. 3. Hinc, omnes ab uno puncto, divergentium tanquam ab altero quodam uno prodeuntes.

Fig. 29.

Quoad punctum longè distitum (suo parallelos ad sensum radios ejaculante) patet è penultima. Quoad punctum è sensibilibiter finita distantia radians, ex ultima patet, quòd omnium ab A divergentium radiorum reflexi protracti concurrunt in Z; adeoque videbuntur ab eo promanare.

XVI. Hinc punctum Z erit ipsius A (respectu oculi uspiam constituti) imago perfectissima. Siquidem imaginis vocabulo nil aliud intelligo, quam locum a quo plures radii (quot scilicet afficiendo visui sufficiunt) similiter divergere, seu dimanare videntur, atque cum a primariis objectis diffunduntur. Proinde cujusvis hoc modo radiantis objecti locus apparens, vel imago facilius determinatur.

XVII. Exhinc etiam eadem operâ, visus imaginem adspectantis axis, seu reflexus principalis (iste nimirum qui per oculi centrum (puta O) transit,) & reflectionis (quod vocant) punctum determinantur. Connexa nempe recta O Z erit axis iste; nec non ejus cum E F intersectio N, punctum reflectionis.

Fig. 30.

XVIII. Quoad hoc reflectionis punctum unicam subijciemus annotationunculam. Radiante puncto A, & oculi centro O fixis manentibus recta Catoptrica E F ponatur rectæ cuidam O P parallela, sed alioquin situ indeterminata; erunt omnia reflectionis puncta in *Hyperbola*. Sit, inquam, A P ad O P perpendicularis, & bisecetur A P in X, atque P O in Y; & per X ducatur X G ad P O parallela, item per Y ducatur Y H ad A P parallela; & X G, Y H concurrant in C; tum Asymptotis C G, C H per ipsum O descripta concipiatur *Hyperbole* R O S; hæc per omnia reflectionum dictarum puncta transibit. Nam utcumque ducta E F ad P O parallela *Hyperbola* R O S occurrat ad N; & ducantur rectæ A N, O N; dico angulum A N E angulo O N F æquari. Secet enim A P ipsam E F in B; & ducatur O Q ad A B parallela. Et, ex *Hyperbola* natura, est C D . C Y :: Y O — D N . D N; hoc est O Q . C Y :: N Q . D N. & permutatim O Q . N Q :: C Y . D N. item rursus ob C D . C Y :: Y O . D N. erit componendo C D + C Y . C Y :: Y O + D N . D N. hoc est A B . C Y :: B N . D N. vel permutando A B . B N :: C Y . D N. quare est O Q . N Q :: A B . B N. ergo rectangula triangula, O Q N, A B N similia sunt; & patet angulum O N Q angulo A N B æquari: Q. E. D.

Mereri saltem vel *Hyperbola* gratiâ videbatur hæc ejusce proprietas adnotari; quin & Analogiæ causâ versus ea quæ sequuntur. Neque de reflectionibus ad plana quicquam prætereâ. Ad refractiones transeo,



## LECT. IV.

I. **A**D ea jam accedimus quæ radiis obveniunt ad planam superficiem, vel ad rectam lineam, refractis. Quod argumentum eo diligentius prosequemur, quia nondum pro merito suo videtur fatis ex-cultum; ut & quoniam in eo tractando methodum præstituemus nobis, & quasi normam in sequentibus observandam. Ad rem.

II. Parallelorum rectæ lineæ (EF) incidentium radiorum (AB, MN) refracti ( $B\alpha$ ,  $N\mu$ ) sunt etiam sibi paralleli. Nam quoniam AB, MN sunt, ex hypothese, paralleli, erunt anguli ABE, MNE pares. Itaque refractos habent angulos pares; horumque complementa (scilicet anguli  $\alpha$  BF,  $\mu$  NF) æquantur, quare liquet refractos  $B\alpha$ ,  $N\mu$  sibi parallelos esse. Fig. 31.

III. Hinc infinitè distantis, hoc est parallelos radios emittentis (in-finitam ad sensum distantiam intelligo, qualis est quoad hoc stellæ cu-juspiam) puncti locus apparens, aut imago per hujusmodi refractionem effecta infinitè quoque distat; quippe cum hæc etiam per radios parallelos adspectetur. Itaque situs ejus respectu visus ubivis positi fa-cilè determinatur. Sit oculi puta centrum O; & A punctum radians; immensè distitum; connexaque AO refringentem EF secet in G; sitque radii AG refractus  $G\alpha$ ; per O verò ducatur OBZ ad  $G\alpha$  parallela; in hac ad infinitum protensa (velut ad Z) apparebit pun-ctum A. Cum enim radii AG, AB sint (ad sensum) paralleli, eti-am ipforum refracti erunt paralleli. Quare cum  $G\alpha$  sit refractus ipsius AG, erit BO, ad  $G\alpha$  parallela, etiam radii AB refracti. Ergò punctum A in recta OB protensa apparebit. Quoad hujusmodi radi-ationem nil succurrit aliud; itaque de propinquo radiantis puncti sym-ptomata contemlemur. Fig. 32.

IV. Sit recta AB rectæ refringenti EF perpendicularis; in qua sit punctum radians A, ab EF haud ad sensum longè remotum; ab hoc Fig. 33.  
autem

*Leſt. 3. num. 9.* autem procedentis cujuſvis radii (ceu  $AN$ ) refractus  $N\alpha$  cum ipſa  $AB$  (protractus utique, vel retractus) conveniat in  $K$ ; dico fore  $NK.NA::I.R$ . (Neque non inverſe, ſi fuerit  $NK.NA::I.R$ ; erit  $KN\alpha$  ipſius  $NA$  refractus.)

*Fig. 34, 35.* Hoc eſt ſuperius oſtenſis immediatè conſectatur. Et hinc etiam ſatis apparet, quoniam (id quod bene notetur, ut paſſim in ſequentibus aſſumendum) angulus  $NAB$ , æquatur angulo incidentiæ; (quippe cum is complementum ſit anguli  $ANB$ ; ) & angulus  $NKB$  (complementum videlicet anguli  $KNB$ ) æquatur angulo refracto. Cum itaque ſit hinc ſinus anguli  $NAB$  (vel anguli deinceps  $NAK$ ) ad ſinum anguli  $NKA$ , ut  $I$  ad  $R$ ; etiam in triangulo  $NAK$  latus  $NK$  ad latus  $NA$  ſeſe habebit ut  $I$  ad  $R$ . Quod  $E. D.$  Quinetiam ſi latera  $NK, NA$  ſe habeant ut  $I$  ad  $R$ ; etiam dictorum angulorum ſinus ita ſe habebunt; unde conſtabit ipſam  $KN\alpha$  ad  $AN$  pertinere.

V. Hinc particularis emergit expeditiſſimus modus huiusmodi quocunque refractos designandi. Nempe per radians punctum  $A$  ducatur  $AB$  refringenti  $EF$  perpendicularis; & fiat  $AB.ZB::R.I$ ; tum per  $Z$  ducatur recta  $GH$  ad  $EF$  parallela. Proponatur jam quilibet incidens  $AN$ , cui conveniens designandus eſt refractus. Eum ſic deſignaveris. Protrahatur  $NA$  (ſi opus) ut cum  $GH$  conveniat in  $S$ ; & centro  $N$  per  $S$  deſcribatur circulus ipſam  $AB$  ſecans in  $K$  (ſecabit utique ſi refractus aliquis ad incidentem  $AN$  pertineat) erit connexa  $KN$ , protractæque radio  $AN$  debitus refractus. Etenim eſt  $KN.AN::SN.AN::ZB.AB::I.R::KN.AN$ . unde liquet (eſt præcedente) propoſitum.

VI. Exhinc etiam huiusmodi refractionis præcipua ſymptomata perfacili colliguntur Negotio; quæ ſeorſim acceptis, & quæ ſecum mutuò collatis accidunt refractis; hoc imprimis: In primo caſu (quum nempe refractione fit eſt rariori in denſius, ſeu quum  $I < R$ ) concurſus refractorum cum recta  $AB$  (quam ſubinde radiationis huius axem appellare licebit) ſupra punctum  $Z$  exiſtit. Nam connexa  $NZ$ ; quoniam ang.  $NZS$  recto  $BZS$  major eſt, erit  $NS$  (vel  $NK$ )  $< NZ$ ; adeoque  $BK < BZ$ . Item, in ſecundo caſu (quum media contrariè ſe habent) dictus concurſus infra punctum  $Z$  exiſtit. Etenim rurfus connexa  $NZ$ ; eſt ang.  $NSZ$  recto  $AZS$  (interno) maior, adeoque  $NZ < NS$ , vel  $NK$ ; & ideo  $BZ < BK$ .

*Fig. 35.* VII. Hinc liquet punctum  $Z$  eſſe limitem ultra vel citra quem (reſpectivè) omnes refracti cum axe  $AB$  concurrunt. Quinimò quòd ipſius

ipſius perpendicularis AB (quaſi) refractus in ipſum punctum Z terminatur. Porro :

VIII. *Lemma* : ſit AB ad EF normalis, & à duobus in AB ſumptis utcumque punctis A, I (quorum A proprius ipſi B) ad duo puncta quæ vis M, N in ipſa EF acceptis (quorum verò M ſit ipſi B vicinius) conneſtantur rectæ AM, AN ; & IM, IN ; dico fore AN . AM  $\subset$  IN . IM .

Nam centro N per A deſcribatur circulus PAOR (rectas IM, IN interſecans punctis O, R) & per R ducatur RT ad EF parallela, ſecans IM in S. Et ob angulum NRT obtuſum, patet rectam RT extra circulum totam excidere ; unde SM  $\subset$  (OM  $\subset$ ) AM . adeoque AN . AM  $\subset$  AN : SM :: RN . SM :: IN . IM . liquet igitur eſſe AN . AM  $\subset$  IN . IM : Quod E. D. Hinc

Si duorum radiorum AM, AN (quorum hic obliquior) refracti  $M\alpha$ ,  $N\alpha$  cum axe AB conveniant punctis I, K, erit in primo caſu IB  $\supset$  KB ; in ſecundo IB  $\subset$  KB. Etenim connexâ I  $\alpha$  ; eſt in primo caſu,  $NK.MI :: NA.MA \subset NI.MI$  . adeoque NK  $\subset$  I . unde BK  $\subset$  BI . aſt in ſecundo,  $NK.MI :: NA.MA \supset NI.MI$  . MI quare NK  $\supset$  NI ; & indè BK  $\supset$  BI .

Fig. 37.

IX. *Coroll.* Refractorum in primo caſu concurſus extra angulum ABN verſantur ; in ſecundo, intra eundem. Sed hæc eadem in decurſu liquidius, ac multifariâ conſtabunt.

X. Porro, bina quoad hos caſus *Theoremata* ſubjiciemus, uſus haud contemnendi.

1. Si fiat (in primo caſu) YB . AB :: I .  $\sqrt{Iq - Rq}$  . ſit autem cuſſusvis incidentis AN refractus KN  $\alpha$  ; & connectatur YN : erit KB . YN ::  $\sqrt{Iq - Rq} . R$  . Fig. 39.

Nam ob YBq . ABq :: (a) Iq . Iq - Rq . erit per converſionem rationis YBq . YBq - ABq :: Iq . Rq :: (b) KNq . ANq (a) *Hypoſ.* (b) *4 hujus.* & permutando YBq . KNq :: YBq - ABq . ANq componendoque YBq + KNq . KNq :: YBq + BNq . ANq . (nempe YBq - ABq + ANq = YBq + BNq ; quoniam ANq - ABq = BNq) Quare rursus permutando eſt YBq + KNq . YBq . + BNq :: KNq . ANq . dividendoque KNq - BNq . YBq + BNq :: KNq - ANq . ANq ; hoc eſt KBq . YNq :: Iq - Rq . Rq : Q. E. D.

Fig. 40.

XI. *Corol.* 1. Hinc si duo refracti  $M\alpha$ ,  $N\alpha$  cum Axe  $AB$  conveniant in  $I$ ,  $K$ ; & à puncto  $Y$  ad incidentias ducantur rectæ  $YM$ ,  $YN$ ; erit  $KB \cdot IB :: YN \cdot YM$ . Nam  $KBq \cdot YNq :: Iq - Rq$ .  $Rq :: IBq \cdot YMq$ . quare permutatim  $KBq \cdot IBq :: YNq \cdot YMq$ .

XII. 2. Hinc etiam si refracti  $MI$ ,  $NK$  conveniant in  $X$ ; & demittatur  $XP$  ad  $AB$  parallela; & huic protractæ  $MY$ ,  $NY$  occurrant in  $R$ ,  $S$ ; erit  $NS = MR$ . Nam  $XP \cdot SN :: KB \cdot YN :: IB \cdot YM :: XP \cdot RM$ . cum itaque sit  $XP \cdot SN :: XP \cdot RM$ ; erit  $SN = RM$ .

XIII. 2. In secundo casu; sit cujusvis incidentis  $AN$  refractus  $KN\alpha$ ; & fiat  $YBq \cdot KBq :: Rq \cdot Rq - Iq$ ; & connectatur  $YN$ ; erit  $ABq \cdot YNq :: Rq - Iq \cdot Iq$ .

Fig. 41.

Nam quia  $KBq = KNq - BNq = KNq - YNq + YBq$ ; erit (hypothesein persequendo)  $YBq \cdot KNq + YBq - YNq :: Rq \cdot Rq - Iq :: ANq \cdot ANq - KNq$ . & per rationis conversionem  $YBq \cdot YNq - KNq :: ANq \cdot KNq$ . (est autem  $YBq = YNq - BNq = YNq - ANq + ABq$ ) ergò  $YNq - ANq + ABq \cdot YNq - KNq :: ANq \cdot KNq$  (hoc est, antecedentes & consequentes adjungendo)  $:: YNq + ABq \cdot YNq$ . quare dividendo  $ANq - KNq \cdot KNq :: ABq \cdot YNq$  hoc est  $Rq - Iq \cdot Iq :: ABq \cdot YNq$ : Q. E. D.

Fig. 42.

XIV. *Corol.* 1. Hinc rursus, si duo refracti  $M\alpha$ ,  $N\alpha$  secant axem punctis  $I$ ,  $K$ ; ipsos autem se decussent puncto  $X$ ; & fiat  $YP \cdot XP :: R \cdot \checkmark Rq - Iq$ . & per  $Y$  ducantur  $MYR$ ,  $NYS$ ; erit  $NS = MR$ .

Nam  $SB \cdot KB :: YP \cdot XP :: R \cdot \checkmark Rq - Iq$ . quare  $AB \cdot SN :: \checkmark Rq - Iq \cdot I$ . item  $RB \cdot IB :: YP \cdot XP :: R \cdot \checkmark Rq - Iq$ . quare  $AB \cdot RM :: \checkmark Rq - Iq \cdot I$ . ergò  $AB \cdot SN :: AB \cdot RM$ . quare  $SN = RM$ .

2. Hinc  $SB \cdot RB :: KB \cdot IB$ .

XV. Porro, notandum est quò radii ab  $A$  manantes axi viciniore sunt eò refractos ipsorum spissius incedere; seu minora fore concursuum intersitia; ut nempe si in refringente  $EF$  sumantur æqualia intervalla  $MN$ ,  $NO$ ; & radiorum punctis  $M$ ,  $N$ ,  $O$  incidentium refracti  $M\alpha$ ,  $N\alpha$ ,  $O\alpha$  cum axe concurrant punctis  $I$ ,  $K$ ,  $L$ ; erit intervallum

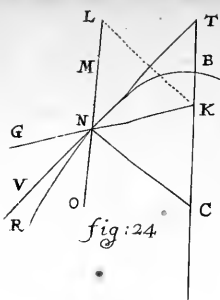


fig: 24

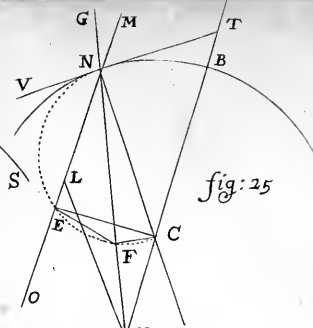


fig: 25

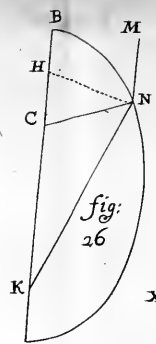


fig: 26

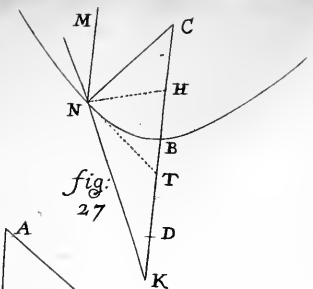


fig: 27

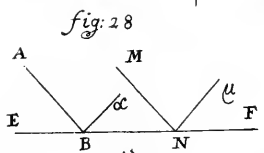


fig: 28

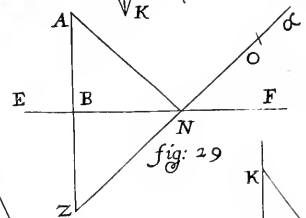


fig: 29

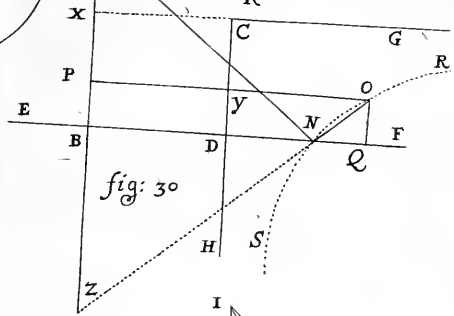


fig: 30

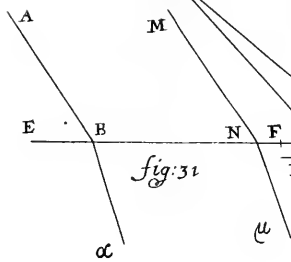


fig: 31

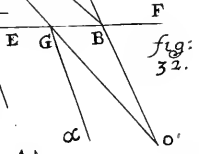


fig: 32

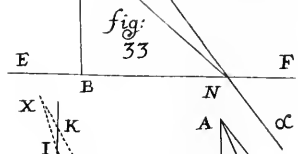


fig: 33

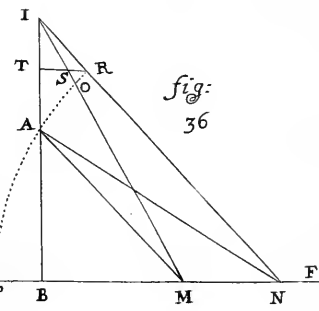


fig: 36

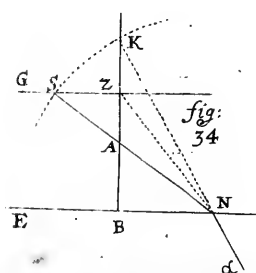


fig: 34

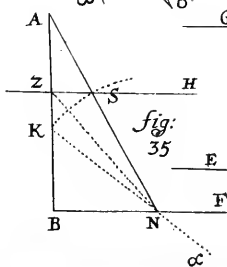


fig: 35

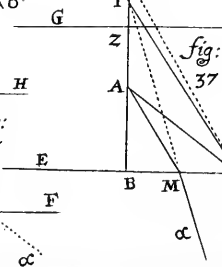


fig: 37

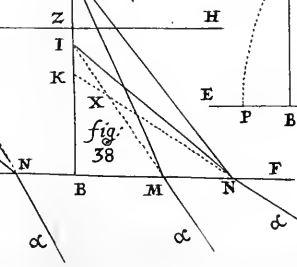


fig: 38

Opt pag 34



tervallum I K minus ipso K L ; seu generalius efferendo, libere sumptis ipsis M N, N O, erit I K. K L  $\rightarrow$  M N. N O. hoc verò non aliter, opinor, elegantius quam ex adjunctis uno, vel altero Theoremate constabit.

Fig. 43.

XVI. In primo casu ; sit (ut antehac) Z B. A B :: I. R, superque diametro Z B constituatur semicirculus ; cui à puncto B adaptetur B D = B A, & per puncta Z, D ducta recta refringenti occurrat in Y, tum ad semiaxes B Z, B Y (centro nempe B, vertice Z) describatur Hyperbole H Z G, in hac autem sumpto quolibet puncto S ducantur S N ad A B, & S K ad E F parallelæ. Denique ducantur A N, K N  $\alpha$ , erit K M  $\alpha$  incidentis A N refractus.

Fig. 44.

Nam ex *Hyperbolæ* natura est K B q — Z B q. B N q :: B Z q. B Y q :: Z D q. B D q (hoc est) :: Z B q — A B q. A B q. quare componendo K B q — Z B q + B N q. B N q :: Z B q. A B q hoc est K N q — Z B q. B N q :: Z B q. A B q. permutandóque K N q — Z B q. Z B q :: B N q. A B q rursusque componendo K N q. Z B q :: A N q. A B q. denuóque permutando K N q. A N q :: Z B q. A B q :: I q. R q. quare K N. A N :: I. R. ergo K N ipsius A N refractus erit : Q. E. D.

XVII. Hinc refractorum cum axe concursus (puta I, K, L) à se distant intervallis ordinatim applicatarum ad *Hyperbolam*, puta rectarum, B Z, M R, N S, O T ; vel ipsarum O, Z I, Z K, Z L. Hæ verò (ceu passim notum, & à nobis aliquando generatim circa cunctas hujusmodi curvas ostensum est) in majori ratione crescunt, quam ipsæ B M, B N, B O ; nempe Z L. Z K  $\leftarrow$  L T. K S. & Z K. Z I  $\leftarrow$  K S. I R. quare satis liquet propositum. Enimverò prope verticem Z ordinatarum differentiarum perquam exiguæ sunt ; ut bene multorum perpendiculari A B adjacentium radiorum refracti velut è puncto Z manare videantur ; utcunque circa ipsum præcipuè conspiciantur.

XVIII. Haud absimiliter, in secundo casu, super ipsa A B describatur semicirculus ; & huic accommodetur B D = B Z ; & connexa protractaque A D refringenti occurrat ad Y, tum centro B semiaxibus B Z, B Y describatur ellipsis H Z G, & in hac accepto quocunque puncto S ducantur S N ad Z B, & S K ad E F parallela ; connectantur denique rectæ A N, K N, erit K N incidentis A N refractus. Etenim ex ellipsis natura est K S q. Z B q — S N q :: B Y q. B Z q :: B Y q. B D q :: B A q. A D q :: B A q. B A q — B Z q. & per con-

Fig. 45.

versam rationem  $KSq. KSq - ZBq + SNq :: BAq. BZq$ . hoc est  $KSq. KNq - ZBq :: BAq. ZBq$ . quare permutando erit  $KSq. BAq :: KNq - ZBq. ZBq$ . & compositè  $KSq + BAq. BAq :: KNq. ZBq$ . hoc est  $ANq. BAq :: KNq. ZBq$ . quare rursus permutando est  $ANq. KNq :: BAq. ZBq :: Rq. Jq$ . itaque  $AN. KN :: R. I$ . unde patet  $KN$  ipsius  $AN$  refractum fore:  $Q. E. D.$

XIX. Eahinc, ut in priore casu, patet quòd distantiae ( $ZI, IK, KL$ ) concursuum æquantur differentiis ipsarum  $ZB, KM, SN, TO$  ordinarum ad ellipsim. Et quod  $ZI, ZK \rightarrow IR, KS$ . &c differentiae porro dictae circa verticem ellipsis  $Z$  admodum exiguae sunt, adeoque propinquiorum axi radiorum refracti circa  $Z$  dense congregantur, & velut ab eo procedere videntur.

XX. Ex his tandem universis colligitur quòd puncti radiantis  $A$  imago (respectu scilicet oculi centrum  $O$  habentis uspiam in axe  $AB$  constitutum) circa punctum  $Z$  consistet. Sit enim  $D^A$  diameter pupillae (illa nempe quae in plano  $EAF O$ ) & per hujus extrema transeant radiorum  $AM, A\mu$  refracti  $IMD, I\mu^D$ ; sanè patet quòd nullius obliquioris (ceu ipsius  $AN$ , vel  $A^*$ ) refractus oculum ingredi poterit; quin universi tales aliorum digredientur, adeoque nec illi quicquam advistum attinebunt; eique nil omnino conferent efficiendo quaquam, nedum determinando. Quinimò cum visus a solis afficiatur radiis intra spatium  $ZI$  axem interfecantibus, adeoque velut ab eo procedentibus, intra spatium  $ZI$  necessario versabitur imago; quia verò ex his qui circa  $Z$  concurrunt oculo rectius incidunt, ideoque præcipuà vi pollent; cum & ii (uti mox ostendimus) spissiores sint, & præ cæteris confertim incedant (id quod etiam nonnihil illorum vim adauget) cum etiam iidem facilius ab oculo rursus in idem punctum recolligantur (id quod posthac aliquatenus ostendemus, & interim ex eo fit verisimile, quòd res per exiguum foramen spectatae, radiis scilicet obliquioribus exclusis, longè distinctius, apprehenduntur) quoniam, inquam, hæc ita se habent, iis perpendicularis omnino rationi consentaneum est objectum videri ceu radios projiciens à puncto  $Z$ , hoc est ejus imaginem inibi consistere. Addo, quòd ob exilem pupillae latitudinem, & propter aliquantam oculi distantiam à refringente; totum spatium  $ZI$  perquam angustum erit, & instar puncti merebitur existimari: quæ cuncta propositum abunde videntur confirmare.

Fig 46.

XXI. Accedit



XXI. Accedit tamen ei penitiùs astruendo etiam experientia : quâ nempe compertum habetur ; quòd objectum (velut A) in aquâ situm, oculo (O) perpendiculariter imminenti, ita distans videtur (puta ad Z) ut sit perpetuò AZ quadrans ipsius AB, id quod ratiociniis præcedentibus exquisitè congruit. Etenim cum experientia docuerit in refractionibus ex aqua factis in aërem, *Sinum anguli Incidentiæ ad Sinum anguli Refracti* se habere circiter, ut 3 ad 4 ; erit juxta constructionem præmissam ipsius ZB ad AB ratio subsesquiertia ; seu hæc ad illam ut 3 ad 4. Quare nihil erat causæ cur hoc fretus experimento *Is. Voss.* Præclarissimus vir receptam de refractione sententiam impugnaret, & exploderet ; at potiùs ut ei promptiùs accederet, aut firmiter adhæreret, expositi Phænomeni causam adeò perspicuam, adeo necessariam suggerenti. quinimo perpendicularem ipsam (quod adeò valde vult, acriterque contendit) è superiore doctrinâ quadantenus infringi, decurtarique (terminatione saltem refringi, tametsi non situ) patebit ad illam attendenti.

XXII. Habetur itaque definitus imaginis situs, ob oculum in axe collocatum. Succedit ut idem præstemus oculi gratiâ extra ipsum ubicunque siti. Sed priùs unum est quod opportunè moneamus, antea prætermissum ; eâdem scilicet operâ quoad radios convergentes simul ac divergentes confici negotium. Erunt enim ad punctum quodvis (ceu A) tendentium radiorum refracti prorsus iidem eum illis, qui divergentibus ab A convenient, modò cæteris manentibus invariantis (refringente scilicet & puncto A designatum situm retinentibus) media concipiantur transposita. Nimirum, exempli causâ, si NK sit refractus radii BN versus A tendentis è raro in densum ; erit itidem NH ipsi KN in directum positus radii ANB, è raro in densum *Fig. 47.* (quæ nempe prioribus homogenea sint) procedentis refractus. Itaq ; quæ de radiis divergentibus ostensa sunt, ea convergentibus, adhibito iusto moderamine, pariter adaptari possunt ; in horum locum divergentes respectivè congruos subrogando. Quare nedum in hoc casu, sed in omnibus qui sequuntur, de radiis solummodò divergentibus instituemus sermonem ; eò subintelligentes etiam convergentes ex hac regula determinabiles referri. Quæ sanè compendio deserviens observatio, generalibus istis supra delibatis meruit intertexi ; nec enim ad hanc solam quæ præ manibus, ast ad omnes æquè, quilibet ad superficies, radiorum inflectiones se extendit.

XXIII. Adsimilem & indè consequentem (cum paralleli à puncto  
proveniant

proveniant infinitè dissito) circa radios parallelos observatiunculam, compendio sentem, etiam hîc tempestivum fuerit adungere; parallelorum nempe Convexis incidentium partibus radiorum inflexi, quoad positionis directionem, iidem erunt cum inflexis ipsorum concavis partibus incidentium; modò transposita concipiuntur media. Quare parallelorum radiationes examinando nihil erit opus convexas partes a concavis distinguere; seu exinde casus multiplicare. Res è posthac dicendis clarior evadet: His admonitis, de tabula jam manum; & quam proposuimus instituendam proximè disquisitionem sequenti reservamus.

## LECT. V.

I. **EO** jam provecti sumus, ut radiantis (à sensibilibus finita distantia) puncti locum apparentem investigemus, illum nempe qui resultat, è peracta ad planam superficiem refractione; nec non respectu visus extra radiationis axem constituti. Quorsum imprimis spectat, ut rectam determinemus lineam, in qua locus ille versatur; tum ut singulare designemus in illa recta punctum, circa quod exquisitè consistit. Utriusque quæsitæ gratiâ conficiendum, (imo penitus excutendum) venit hujusmodi *Problema*:

II. *Dato puncto A, in positione datam rectam EF radiante, designandus est incidens, qui per alterum transeat datum punctum.*

Fig. 48, 49. III. Si datum punctum alterum (puta jam K) in recta AB existat, ad refringentem EF perpendiculari Problema planum erit, ac ita facile conficietur. In primo casu (quando scilicet  $I \leftarrow R$ ) fiat  $AB \cdot YB :: \sqrt{Iq} - Rq \cdot I$ . itemque fiat  $KB \cdot T :: \sqrt{Iq} - Rq \cdot R$ ; tum centro Y intervallo T descriptus circulus ipsam EF secet in N; connectanturque AN, KN; erit  $KN \propto$  ipsius AN refractus.

Idem in secundo casu (cum  $I \rightarrow R$ ) fiat  $KB \cdot YB :: \sqrt{Rq} \cdot Iq \cdot R$ .  $AB \cdot T :: \sqrt{Rq} - Iq \cdot I$ . centroque Y intervallo T describatur circulus ipsi EF occurrens in N; eritque rursus  $KN \propto$  ipsius AN

**A N** refractus. Hæc autem è supra positis Theorematis abunde constant.

10 &amp; 13 Let. 4.

IV. Verum extra casum hunc, & particulares alios nonnullos (quos hic certè nil attinet commemorare) generatim & illimitatè conceptum Problema solidum est, pluresque duabus solutiones admittit; id quod facilè perspicietur concipiendo punctum datum (puta X) in primo casu extra angulum A B F jacere (vel intra eundem, in secundo) quo posito liquet è præcedentibus obtingere posse nonnunquam, ut duorum ad partes B F incidentium refracti concurrant ad X; quin & alterius unius ad partes B E incidentis refractum etiam per idem X transire quod cum subinde, dico, contingere possit, indè certò consequetur *Problema* solidum esse.

Fig. 50.

V. Pro cujus solutione, primùm adnoto vix ullum *Problema* dari (præsertim è difficilioribus) quod non peculiarem lineam naturâ sibi met appropriatam habeat, cujus descriptione quàm expeditè construat; & quidem ità, ut simul indolem suam prodatur; possibilitatem, inquam, & impossibilitatem suam; determinationes, & limitationes necessarias; casuum & solutionum varietatem apertè monstret, & velut ob oculos representet. In cujus qualis qualis observationis specimen (alia quædam postmodum exhibituri) imprimis lineam proponemus hujusce Problematis executioni peculiariter accommodatam, hoc modo promptè describendam.

VI. Per radians punctum A ducatur A R S refringenti parallela; eidemque perpendicularis A B utrinque protendatur indefinitè. Item per datum alterum punctum X protendatur X R ad A B parallela: Quinetiam factò A S. A R : I. R; per S extendatur S U ad A B parallela. Quibus stantibus per A quotcunque transeant rectæ secantes ipsam S U punctis H; & centro X, intervallis ipsas A H exæquantibus, describantur circuli secantes perpendicularem A B punctis K; demum per X, K ductæ linæ cum ipsis H A conveniant in N. Per ejusmodi quæcunque puncta transibit propositò nostro deserviens linea (A N N) quam suscepimus describendam; cujusce nimirum cum refringente F F intersectiones ipsissima sunt incidentiæ puncta, quæ indagamus (hæ autem ad unas rectæ A B partes (veluti ad F) aliquando duæ erunt; subinde tantum una, cum E F sic effectam curvam tangit; quandoque nulla, cum E F ultra tangentem dictam jacet; ad alteras saltem una erit; quæ satis attendenti manifesta futura subnotatum

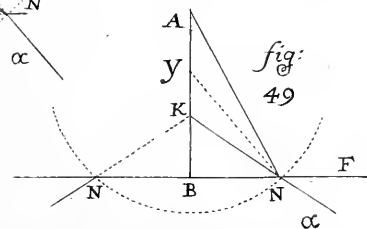
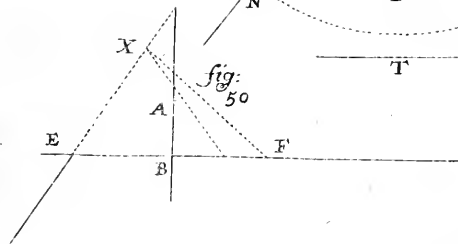
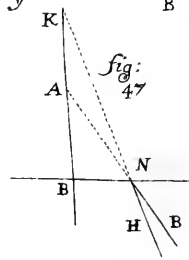
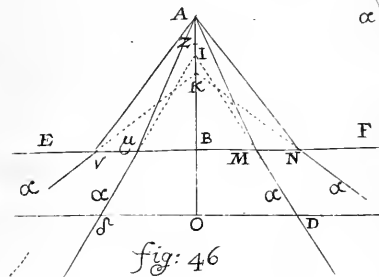
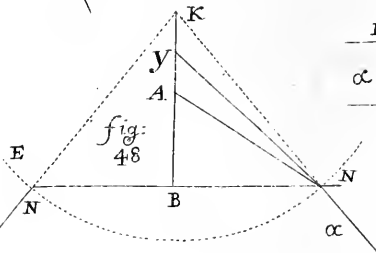
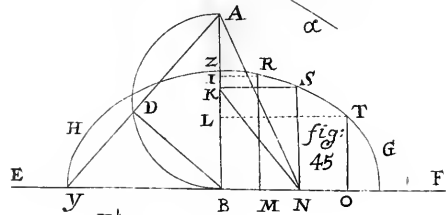
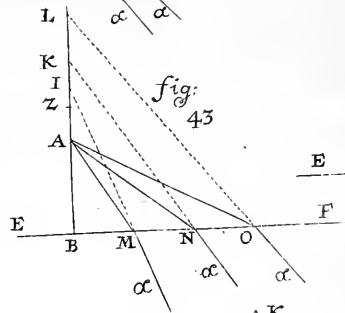
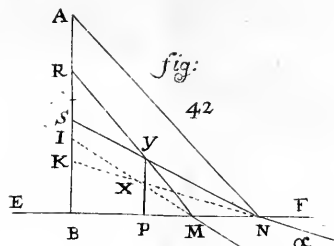
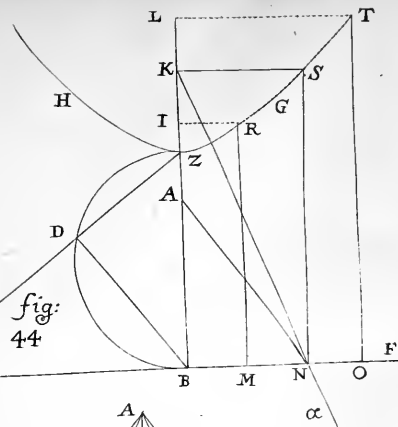
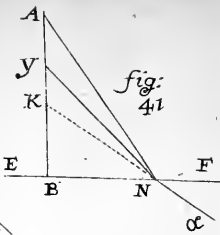
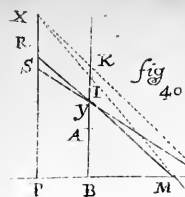
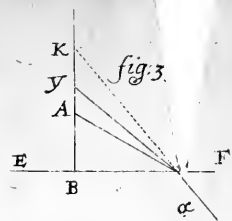
Fig. 51.

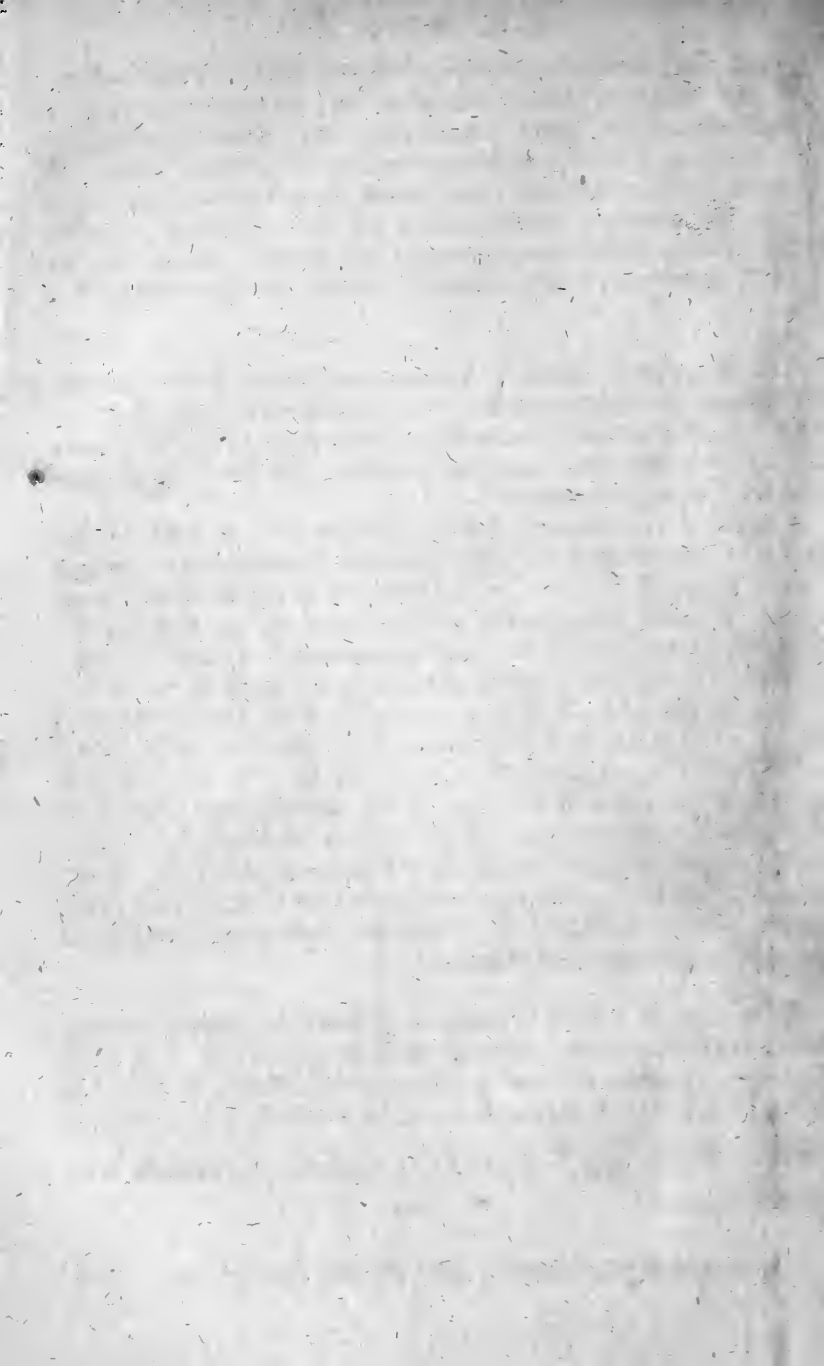
tum & levi pede prætereo ; quoniam aliunde mox apparitura) sit, inquam, ejusmodi qualibet intersectio N ; dico fore XN, ipsius AN refractum. Etenim est  $I. R :: AH. AT$ . hoc est (quoniam AH, KX sunt ex constructione pares)  $I. R :: KX. AT :: NK. NA$ . unde manifestum, e præmonstratis, est propositum.

Fig. 52.

VII. Veruntamen hujusmodi constructiones *Geometrarum* usus aut non libenter admittit, aut alias saltem exigit per lineas vulgo notas, atque receptas ; itaque consuetudini morem gerentes rem aliter conficiemus ; huc utique faciens sequens *Problema Lemmaticum* præmittentes : Dato angulo recto XPF ; punctoque quovis Y ; per hoc rectam duce e dati anguli cruribus occurrentem, sic ut ab iis intercepta sit a qualis data rectæ T. || Expediitissimè quidem perficitur hoc ope *Conchoidis* alicujus polo Y descriptæ ; sed enim quoniam & iste modus hand ita Geometricus censetur ; adhuc iisdem Geometris obsequentes ita propositum exequemur. Ducatur YB ad PF perpendicularis ; & *Asymptotis* PX, PB ducatur *Hyperbola* per Y transiens (si quidem punctum Y existat extra angulum datum, aut istius opposita (sc. punctum Y sit intra dictum angulum) tum centro Y intervallo datam T æquante descriptus circulus *Hyperbolam* intersecet in K, & à K demittatur KL ad BP perpendicularis ; accipiat autem BN = PL ; & per NY trajiciatur recta NG. dico factum ; vel esse NG parem datæ T. || Nam (ductâ YH ad PB parallelâ) ex *Hyperbola* proprietate est  $PL \times LK = PB \times BY$ . adeoque cum sit ex constructione  $BN = PL$ , erit  $BN \times LK :: PB \times BY$ . adeoque  $BN. BY :: PB. LK$ . est autem  $BN. BY :: DY. DG$ . ergo est  $PB. LK :: DY. DG$ . quare cum sit  $PB = DY$ . erit  $LK = DG$ . adeoque (pares LH, DP addendo, vel subtrahendo) est  $KH = GP$ . quin etiam est  $YH = LB = PN$  (communem nempe PB, vel LN addendo) Ergò patet fore YK (vel T) æqualem ipsi GN : Q. E. F.

VIII. Notandum est autem in casu, quando punctum Y intra datum angulum XPF existit, quod circulus ille centro Y descriptus subinde designatam hyperbolem binis punctis secabit (quod enim pluribus haud quoquam secabit universim haud ita pridem circa tales ad eadem convexas curvas ostendimus) quo casu patet duas obvenire propositi solutiones, aliquando rursus ille dictus circulus *Hyperbolem* continget ; & tum una tantum per Y duci poterit recta, datam T adæquans, illa scilicet omnium quæ per Y dato angulo interfieri possunt minima. Quod si circulus *Hyperbolæ* non occurrat, *Problema* prorsus *impossibile* erit.





erit. || Sin punctum Y extra datum angulum existat, evidens est tantum uno modo problemati satisfactum iri; quodque per alteram intersectionem, & Y, ducta recta ad angulum pertinet dato verticalem. hæc, inquam, tantillum attendenti manifestè constabunt; nihil ut sit opus hic plura verba consumere. verum ut in horum casuum primo constet (id quod pro sequentibus ex usu erit cognoscere) quando dictus circulus *hyperbolicus* contingit; seu quando tantum una per Y recta quantitatis ejusdem interferi possit, hoc adnectemus *Theorema*.

IX. Si à puncto quovis Y intra rectum angulum XPF existente Fig. 54. demittantur ad ejusdem anguli latera perpendiculares YB, YD; ac inter YB, YD proportionem mediæ sint rectæ BN, GD; per puncta N, Y, G transibit recta cunctarum minima, quæ per Y ductæ angulum XPF subtendere possunt.

Quod NYG sit una recta patet, quoniam est YB. BN :: GD. DY (ex constructione nimirum) porro per Y transeat alia quæcunque recta LYM; & NH ad GN, MH ad PF perpendiculares concurrant in H. item HA ad NG parallela ducatur; & GS ad PF; denuoque connectatur GH. Jam patet triangula GDY, YBN, HMN, HMR similia fore; quodque propterea est MN. MR :: MNq. MHq :: DGq. YDq. item (ob BN, DG, YD ::) est BN. YD :: DGq. YDq. hoc est YN. YG (vel MN. GS) :: DGq. YDq. ergo est MN. MR :: MN. GS. adeoque MR = GS. itaque major est GS ipsâ MT; ab eoque rectæ GH, LM protractæ concurrent; puta ad Z. ergo LM. GH :: LZ. GZ. verum propter angulum LGH recto P majorem, est LZ < GZ. quare LM < GH. ast ob angulum rectum GNH est GH < GN. quare magis est LM < GN. eodemque modo quævis per Y ducta major ostendetur ipsâ GN: Q. E. D.

X. Hinc etiam si GN sit in ratione YB ad YN quarta proportionalis; erit GN minima. nam inde consequetur fore YB, BN, GD, YD ::. Etenim erit YNq. YBq :: GN. YN. & dividendo BNq. YBq :: GY. YN :: DY. BN. ac inde YBq x DY = BNcub, vel DY =  $\frac{BN \text{ cub}}{YBq}$ . itaque DY est quarta proportionalis in ratione YB ad BN.

XI. Subnotari potest autem, quod minimæ GN propiores remotioribus  
G

rioribus minores sunt. & quod cuivis eâ majori binæ pares interferi possunt, ad ejus utramque partem singula. nimirum hæc è superiori constructione luculentè patent; pauxillum expende Sodes; & perspicies; operámque meam non desiderabis.

Fig. 55, 56. XII. His præstratis ad *Principale construendum Problema* revertimur; & reliqua detexenda. scilicet imprimis à dato puncto A prodiens radius est designandus, cujus refractus per datum punctum X transibit. || hoc ita conficitur. per A, X ducantur refringenti perpendiculares AB, XP. tum in primo casu fiat  $AB.YB::\sqrt{Iq}-Rq$ . I. neque non fiat  $XP.T::\sqrt{Iq}-Rq.R$ . & per punctum Y transadigatur recta NG subtendens angulum APF, & ipsam Texæquans; & connectantur AN, XN. dico factum; seu rectam XV incidentis AN refractum esse. || Etenim est  $XP.KB::NP.NB::NG.NY$ . permutandóque  $XP.NG::KB.NY$ . hoc est  $XP.NG$  (vel  $\sqrt{Iq}-Rq.R$ ) ::  $KB.YN$ . itaque per theorema præmissum liquet KN ipsius AN refractum esse: Q. E. F.

Haud absimiliter in secundo casu; fiat  $XP.YP::\sqrt{Rq}-Iq.R$ ; itémque  $AB.T::\sqrt{Rq}-Iq.I$ ; angulóque ABF per Y transiens, ipsamque T adaquans inferatur recta NG; connectanturque AN, XN; factum erit. || Nam ipsam XP protractam secet AN in S. estque  $SP.YN::AB.GN::AB.T::\sqrt{Rq}-Iq.I$ . unde consequitur è præmonstratis fore XN ipsius SN refractum Q. E. F.

XIII. Exhinc, & præmissa respiciendo satis dilucescit non ultra duos ad unam perpendicularis AB partes incidentium refractos in uno puncto convenire. nam (ut supra declaratum) per punctum Y (quod universis hujusmodi constructionibus commune, vel invariaturum persistit; in primo casu quoad omnes ab A incidentes; in secundo quoad omnes per X transeuntes refractos) plures duabus sibi pares duabus sibi pares rectæ angulo recto XPF, vel ABF interferi nequeunt; adeóque nec plures refracti per ipsum X transibunt.

XIV. Porrò, cùm è dictis definita habeatur recta, in qua puncti A Imago versatur; iste nimirum refractus qui per oculi centrum transit, modo jam exposito ducendus; ipsum jam punctum determinandum venit, ad quod illa præcisè consistit; id quod etiam è præcedentibus haud difficulter eliciemus.

XV. Sumatur, in casu primo, punctum Y conditione præditum  
jam



jam aliquoties insinuatâ ; scilicet ut sit  $AB.YB::\sqrt{Iq}-Rq.1$  ; & designetur quilibet refractus  $KN$  ; tum continuetur ratio  $YB$  ad  $BN$  ; ut sit ad has proportionem quallâ  $BP$  ; & per punctum  $P$  ducatur recta  $PZ$  ad  $AB$  parallela ; refracto  $KN$  occurrens in  $Z$  ; dico nullum alium refractum per  $Z$  transire. Nam si fieri potest transeat alius  $ZR$  ; & per  $Y$  traducantur rectæ  $NYG$ ,  $RY S$  ; è præmonstratis apparet quod sit  $RS^*=NG$ . item è prædictis manifestum est quod  $RS^*\neq NG$ . quæ repugnant.

Fig. 57, 58.

\* 12. Lect. 4.

\* 9 hujus Lect.

XVI. Non dispari ratione, quoad casum secundum, designetur quilibet refractus  $KN$  ; & fiat  $KB.GB::\sqrt{Rq}-Iq.R$  ; tum adnexâ  $GN$ , ad ipsas  $NG$ ,  $GB$  sumatur tertia proportionalis  $V$  ; & fiat  $NG.V::BN.NP$  ; & per punctum  $P$  ducatur  $PY$  ad  $BA$  parallela refractum  $NK$  decussans in  $Z$  ; dico nullum alium refractum per ipsum  $Z$  meare. Nam, si neges, transeat alius  $ZR$  ; & per  $Y$  trajiatur  $RY S$  ; & quoniam  $ZP.YP::KB.GB::\sqrt{Rq}-Iq.R$ . ex \* antedictis apparet fore  $RS=NG$ . quinetiam ob  $NGq.GBq::NG.V::BN.NP$ . erit dividendo  $NBq.GBq::BP.NP$ . hoc est  $NPq.PYq::BP.NP$  ; inde facile deducitur esse  $BP$  quartam proportionalem in ratione  $YP$  ad  $PN$  ; consequenterque fore  $RS$  minimâ  $NG$  majorem. quod adversatur ostensis. itaque potius per  $Z$  nullus alius transit refractus :  $Q.E.D.$

\* 14. Lect. 4.

XVI. Præterea, si refractum  $NKZ$  interfecet alius quilibet  $MI$ , ad rectiorem pertinens incidentem (hoc est ut incidentiæ punctum  $M$  inter  $B$ , &  $N$  jaceat) intersectio  $X$  solitario puncto  $Z$  citerior erit (seu perpendiculari  $KB$  propinquior). Nam ab  $X$  demittatur perpendicularis  $XQ$ , ipsam  $NG$  secans in  $\gamma$  ; & (in primo casu) per  $M$ ,  $Y$  traducatur recta  $MYH$ . ergò  $MH=N\gamma$ . quare minima earum quæ per  $Y$  angulo  $X.QF$  interferi possunt inter puncta  $M$ ,  $N$  cadet (utî nuper admonitum, & adstructum). puta ad  $\phi$ . ergò quum sit  $BP$  quarta proportionalis in ratione  $YB$  ad  $BN$  ; &  $BQ$  quarta proportionalis in ratione  $YB$  ad  $B\phi$ , erit  $PB\neq QB$  ; adeoque recta  $XQ$  rectis  $ZP$ ,  $KB$  interjacet :  $Q.E.D.$

Fig. 59, 60.

In secundo casu, per  $\gamma$  trajiatur recta  $M\gamma H$ . ergò cum sit  $QX.Q\gamma::PZ.PY::\sqrt{Rq}-Iq.R$ . erit  $HM=GN$ . ergò minima per  $\gamma$  ducibilium angulo  $ABF$  intercipienda punctis  $M$ ,  $N$  intercider ; puta ad  $\phi$ . quare  $QB$  quarta proportionalis erit in ratione  $\gamma Q$  ad  $Q\phi$  ; & est  $\gamma Q.Q\phi\neq(\gamma Q.QN)::YP.PN$ . & sim.

simplicibus triplicatas substituendo rationes, est  $\gamma Q. QB \sqsubset YP. PB.$  & his æquales rationes adjungendo est  $QN. \gamma Q + \gamma Q. QB \sqsubset PN. YP + YP. PB;$  hoc est  $QN. QB \sqsubset PN. PB.$  componendoque  $BN. QB \sqsubset BS. PB.$  ergo  $QB \sqsupset PB.$  unde rursus liquet rectam  $XQ$  ipsi  $AB$ ;  $ZP$  interjacere:  $Q. E. D.$

XVII. Consimili prorsus argumentatione constabit obliquorum incidentium refractos ultra punctum  $Z$  ipsam  $KN$  interfecare.

XVIII. Quinimò rursus exertius apparet non nisi binos refractos in eodem puncto convenire.

XIX. Addo cum ipso  $KN$  concurrentes refractos circa punctum  $Z$  conglomerari, præsertim illos, qui ad partes  $F$  (obliquius) incidentes pertinent.

Fig. 61.

Nam accipiantur, exempli causâ, sibi pares  $NS, ST$ ; & sit  $BP$  quarta proportionalis in ratione  $YB$  ad  $BN$ ; &  $BQ$  quarta proportionalis in ratione  $YB$  ad  $BS$ ; &  $BR$  itidem quarta talis in ratione  $YB$  ad  $BT$ ; & à punctis  $P, Q, R$  erectæ perpendiculares ipsam  $NKZ$  fecerint in  $Z, X, & V.$  patet (è mox ostensis) omnium spatio  $NS$  incidentium refractos cum  $NK$  concurrere intra  $ZX$ ; nec non omnes ipsi  $ST$  incidentium refractos intra  $XV$  cum eodem convenire. porro rectæ  $BP, BQ, BR$  se habent invicem ut *Cubi* rectarum  $BN, BS, BT$ , (vel sunt in ipsarum  $BN, BS, BT$  ratione triplicata: nam  $BP. YB :: BN \text{ cub. } . BY \text{ cub. } . \& YB. BQ :: YB \text{ cub. } . BS \text{ cub. } .$  adeoque ex æquo  $BP. BQ :: BN \text{ cub. } . BS \text{ cub. } . \& \text{ consimili ratione } BP. BR :: BN \text{ cub. } . BT \text{ cub. } .$ ) undè faciliè monstrabitur esse  $PQ$  multo minorem quàm  $QR$ ; vel  $ZX$  quàm  $XV$  (verbis parco multis in re satis manifesta). quare dicti refracti circa punctum  $Z$  spissius ipsum  $NK$  decussabunt.

XX. Ex his demùm conficitur omnibus bene trutinatis, oculo (O) centrum habenti in refracto  $NK$  uspiam constituto, puncti  $A$  imaginem ad ipsum conditione præditum toties insinuatâ punctum  $Z$  consistere. Sit enim  $CD$  pupillæ (in plano  $ABC$  jacens) *Diameter*; *axi Optico*  $KN$  perpendicularis; & per ejus extrema  $C, D$  transeant refracti  $IM, LR$  ipsi  $KN$  occurrentes punctis  $X, V.$  ex ostensis. patet omnium intra spaiam  $MN$  incidentium radiorum refractos intra terminos  $ZX$  principalem refractum interfecare; neque non omnes ad spatium

spatium NR pertinentes intra ZV eidem occurrere; quin etiam nullus citra punctum M, vel ultra R incidentis refractus (seu nullum citra X, vel ultra V eum ipso KN concurrentem) oculum ingredi posse. quare saltem imago consistet intra terminos VX; siquidem aliunde qui videntur emanare Radii nihil quicquam ad visionem conferent, aut ad eam ullatenus pertinebunt. ceterum quoniam ab VX procedentium (apparenter, inquam, procedentium) recissimi, vel axi propriiores velut ab ipso Z procedere videntur (seu à loco qui circa ipsum) ipsique proinde validius afficiunt oculum, & ab eo facilius adunari, recolligique possunt; cum & ii præ cæteris confertim irruant (illi saltem qui ad partes NR,) quia denique propter angustiam pupillæ spatium VX haud ita magnum existit; cum, inquam, hæc ita se habeant, omnino rationi consentaneum est, dictam imaginem circa punctum Z versari; nec alias arbitror excogitari posse verisimiles causas, quæ situm ejus determinent. *Alhazenum* quidem, & post eum pleraque cohors. *Opticorum* ipsam ad punctum K, ubi principalis refractus perpendicularem AB decussat, constituit; verum haud ullam rei naturam causam suggerit, cur inibi statuatur. unicus enim (nisi saltem pupilla perpendicularem ipsam AB comprehendat, oculusque valde sit ei propinquus) per illud punctum means radius, afficiendo visui minimè suffecturus, ingreditur oculum; eademque punctorum intra KX ipsi K adjacentium est ratio; nullus siquidem ea permeans refractus oculum attingit; nil itaque subest causæ cur punctum A circa K appareat. quin adhuc à vero magis aberrat, \*qui faciens NH æqualem ipsi NA puncto H affigit imaginem (huc, opinior, impulsus quia taliter in reflectione se rem habere perspexit; cui similis causa nō fallor *Euclidem*, *Alhazenum*, *Stevinum* (quantum ipsos in diversum euntes). horumque sequaces, in *Catoptricis*, in errorem egit; prout usu non raro venit *analogias haud bene fundatas*, indistincteque perceptas mortalibus imponere; sed utcumque quod dixi magis ista sententia abhorret à ratione.) nullus enim in primo casu refractorum concursus fit infra angulum ABF; nullus extra illum in secundo; proindeque fortius hanc quæ objecimus; quam priorem *Alhazeni* percellunt sententiam. addo quòd simul utraque, sed præsertim hæc, multiplici refragatur experientiæ, multiplicique ratiocinio; pariter enim se res habere debuit in *Catoptricis*, ut & in *Dioptricis circularibus*; id quòd, manifestè, longeque secus tam ab experientiâ, quam à ratione compertum est. quin hanc abunde subvertit ac pessum dat quod supra proposuimus experimentum, nemini non obvium; quòd nempe punctum A, oculo in ipsa perpendicu-

Fig. 62.

D. Hobbins.

lari.

lari AB constituto, non in suo loco (quod juxta dictam sententiam oportuit) est pro mediorum diversitate, (perquam sensibili intervallo) citerius adspicitur, aut ulterius. Sed effatum hoc nostrum (eique quoad reliquos in Catoptriciis, Dioptriciisque casus similes consona) tamen novitium, & nullâ quod sciam hætenus auctoritate fultum, cum forsan expositum dilucidius, tum penitissimè dabimus confirmatum, si quando nos de imaginum natura, locoque speciatim evenerit differtare. Mihi saltem videtur hæc Scientiâ quoad hanc partem suam, certè palmariam (ut reperitur hætenus tractata) perquam mutila, nè dicam admodum vitiosa; nec aliò ferè collimamus quàm ut aliquousque suppleamus eam, ac sanemus.

Fig. 63.

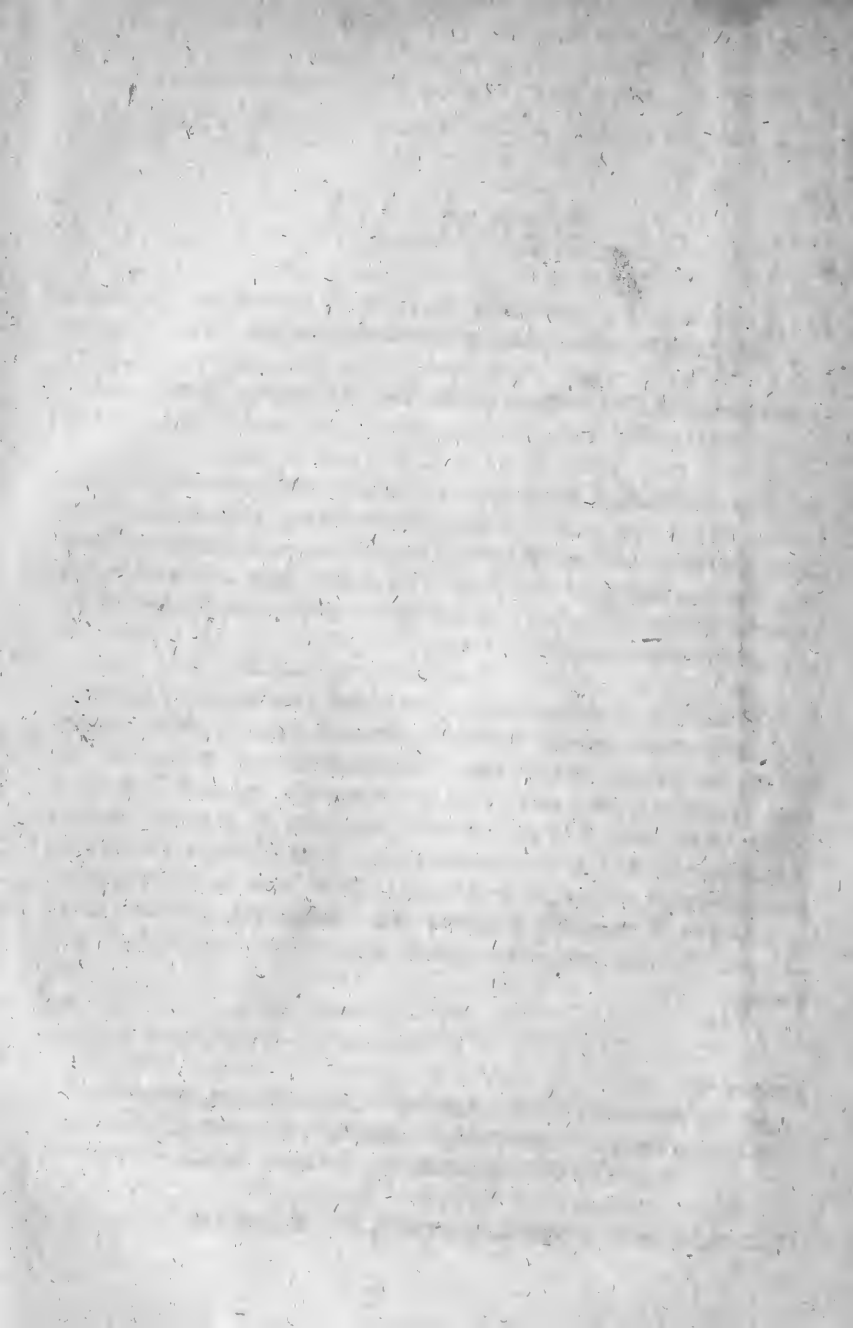
XXI. Proximè dictis confirmandis idoneum haud illepidum experimentum interferemus. Aquæ Superficie RS (stagnanti, & immotæ desuper imminet objectum HG; ejus autem punctum Gradat perpendiculum EF (filum puta candidum, aut stylus, cui plumbum F appenditur) videbitur itaque punctum G (oculo O) ex reflectione in ipsâ perpendiculari GB velut ad  $\gamma$ ; at perpendiculi punctum F (admodum notabili distantia) citra lineam B $\gamma$  aspicitur (velut ad  $\phi$ ) id quod ex sententia nostra factum oportuit; & *Alhazeni*, sequaciumque doctrinam liquidò destruit.

Tom. II, Epist.  
73.

XXII. Subjicio tandem ex his comparere modum genuinam refractionariam quam vocant (per quam nempe recta linea repræsentatur in aquæ fundo conspicua) lineam designandi; cujus loco complures (utique non eandem omnes, est aliam alii) Chimæram inani sunt operâ prosequuti; de quâ *Cartesius* ipse percontanti *Mersenno* sic respondit: "Non potest facillè determinari qualem figuram linea visâ in fundo aquæ sit habitura; neque enim certus est aliquis imaginis locus in reflexis aut refractis, quemadmodum sibi vulgò persuaserunt Optici. Imò verò (tanti viri pace) cum speciale quodvis objectum (per ejusdem generis & eodem modo terminatum medium aspectabile) similem constanter exhibeat speciem sui, simili situ dispositam, simili præditam figurâ; non video quin ex parte rei certum imago locum fortietur; cujus certè (quoad illum qui præ manibus est casum) quocunque puncta non difficilè poterunt è præcedentibus determinari. quinimò nullius non. ex hujusmodi planam ad superficiem refractione subnascentis phænomeni (quoad ejus intelligo figuram) causa verè, nè fallor, hinc & promptè possit assignari. verum hæc circa planas superficies dicta sufficient; ad curvas nos proximè conferemus. ||

Lect. VI.





## LECT. VI.

I. **A**bsolutis iis, quæ radiis accidunt ad planam superficiem inflexis (observatu quæ videbantur non indigna, cumque principis nostris coherentia; quæ denuò viam sternebant, aut methodum aperiebant sequentibus) ad curvas jam gradum promovemus; circa quas equidem cogitâram communia quædam delibare; verùm excussâ re, tam exilem illam & abstractam deprehendo, satius ut existimem actutùm ad particularia descendere. curvarum utique principem, & ad praxes Opticas longè paratissimam, Superficiem Sphæricam aggrediar è vestigio. pro qua tamen, ob causas pridem assignatas, circulos subrogabo per oculi Sphæræque centra, perque singula radiantia puncta trajectos. & quoad hos *Catoptrica* primò, *Dioptrica* postmodum exequemur. Ad illa.

II. Præsternemus autem  $\lambda\eta\mu\mu\alpha\tau\omega\upsilon$  unum vel alterum; hoc imprimis: Incidentium circulo radiorum obliquior est, qui magis à centro distat, vel qui minorem arcum (subsemicircularem) subtendit. scilicet obliquius incidit: recta  $QRS$ , quàm recta  $MNP$ . Nam à centro  $C$  ducantur  $CN$ ,  $CP$ ; &  $CR$ ;  $CS$ . & quoniam angulus  $RCS$  angulo  $NCP$  (hypothesi nimirum insistendo) minor est; patet reliquos  $CRS$ ,  $CSR$  reliquos  $CN$ ,  $P$ ,  $CPN$  (cùm junctim, tum singulàm singulo) majores esse. Cum itaque Semidiametri  $CR$ ,  $CN$ , circumferentiæ perpendiculares sint; omnino liquet propositum.

Fig. 62.

III. Dato radio  $MN$  ad circulum incidenti congruum reflexum resignare.

Fig. 63.

Variis modis huc facile peragitur; quorum nunc unum adhibere; tunc alium ex usu sit. nos unum aut alterum ex expeditoribus attingemus. i. Incidens  $MN$  protrahatur ut circulum denuò secet in  $P$ ; & sumatur arcus  $N\sigma = NP$ ; erit connexa  $\sigma NH$  ipsius  $MNP$  reflexus. nam à centro  $C$  connexâ  $CN$ , manifestum est. angulum  $CN\sigma$ .

Fig. 63.

$CN\sigma$ , angulo  $CNP$  æquari . 2. 2. Accepto quovis in  $NM$  puncto (puta  $M$ ) centro  $C$  per  $M$  describatur circulus  $MQH$ ; item centro  $N$  per  $M$  describatur circulus  $MRH$ , qui priorem  $MQH$  fecerit in  $H$ ; erit  $HN\sigma$  reflexus ipsius  $MNP$ . Etenim connexis  $CM$ ,  $CH$ ; &  $NM$ ,  $NH$ , ex constructione liquet triangula  $CMN$ ,  $CHN$ , invicem æquilatera fore; proindeque angulos  $CNM$ ,  $CNH$  (& indè reliquos  $MNR$ ,  $HN.R$ ) æquari 3. protensa  $CNR$ , a quovis in  $MN$  puncto, puta  $M$  ducatur  $MG$  ad  $CR$  perpendicularis, & in hac producta sumatur  $GH = GM$ ; erit conjuncta  $HN\sigma$  iterum reflexus. Nam connexis  $NH$ ,  $NM$  patet angulos  $GNM$ ,  $GNH$  æquari. verum hi modi sufficiunt huic conficiendo perfacili negotio.

IV. Nocetur si fuerit  $HNP$  reflexus ipsius  $MNP$  fore  $N\sigma = NP$ .

V. Dispiciamus jam primò quid ex hujusmodi reflectione contingat puncto ab infinità quo ad sensum distantia radianti, seu parallelis projicienti radios. quorum, per circuli reflectentis centrum  $C$  protendatur indefinitè recta  $ABC$  (hoc autem in sequentibus evitandæ repetitioni perpetuò factum intelligatur; quin ejusmodi recta nominetur axis; hic *Speculi*, postea *Diaphani*) bisecetur autem Semidiameter  $CB$  in  $Z$ ; & per  $Z$  transeat recta  $ZY$  ad  $CB$  perpendicularis, indefinitèque protensa; tum quilibet incidat axi parallelus radius  $MNP$  ad  $N$ ; (convexo circuli nil refert, an cavo; nam in utroque casu reflexus quoad directionem idem erit; vel ejus qui in hoc, iste qui in illo productus erit) connexaque  $CN$  ipsam  $ZY$  interfecet in  $V$ ; fiatque  $CK = CV$ ; ducaturque  $NK$ ; erit  $NK$  ipsius  $MN$  reflexus (vel reflexi productus.) Nam ducatur  $NQ$  ad  $CB$  perpendicularis, & connectatur  $CP$ . estque  $CZ.CK :: (CZ.CV ::) CQ.CN$ . quapropter antecedentes duplicando  $CN.CK :: PN.CN$ . item angulus  $KCN$  æquatur alterno  $CNP$ . ergò triangula  $CKN$ ,  $NCP$  similia sunt; adeoque  $KN = KC$ . igitur è suprà generatim ostensis patet fore  $KN$ , ipsius  $MN$  reflexum.

VI. Hinc particularis emergit methodus hujusmodi quotcunque reflexos quàm expeditissime delignandi; quin & ipsorum erga se rationes ac respectus; nec non pleraque primaria *Symptomata* facile diluceant; corollariis nempe subjectis comprehensa.

VII. 1. Patet punctum  $Z$ , Semidiameter  $CB$  bisecans, esse metam



metam infra quam nullus reflexus axem secat (vel perpendicularis ipsius reflexum BZ ad Z terminari). quia semper  $Cv \sqsubset CZ$ ; adeoque  $CK \sqsubset CZ$ .

VIII. 2. Patet esse  $KN = KC$ .

3. Patet fore  $P\dot{N}$  ( $2CQ$ ),  $CN$ ,  $CK \div \div$ .

IX. 4. Ductâ tangente BT, productâque CNE, patet secantem CE distantiam CK duplam esse; &  $EN = 2KZ$ .

X. 5. Manifestum est incidentis ad F (hoc est ad distantiam 60 graduum à vertice) reflexum per verticem B transire; proindeque reflexos omnium intra BF incidentium axem intra spacium BZ decussare; sed omnes *extra* BF reflexos ultra B cum eò convenire. Fig. 64.

XI. 6. Perspicuum est duorum hujusmodi quorumvis ad eandem axis partes incidentium (ut ipsorum MNP, QRS) reflexos (ut GNK, HRL,) productos se prius decussare, quam axem. Nam, ductis CR, CN, est  $C_\epsilon \sqsubset Cv$ , adeoque  $CL \sqsubset CK$ . unde necessario rectæ NK, RL, se decussabunt, puta ad X. Fig. 65.

XII. Hinc ipsi convexis partibus incidentium reflexi, NG, RH, antorsum procurentes divergunt; adeoque nunquam uno plures idem oculi centrum permeant. unde speculum convexum unicam longinqui radiantis imaginem reddit.

XIII. 7. Notetur autem angulum GXR (vel KXL) à duobus reflexis comprehensum æquare duplum angulum NCR (hoc est duplum excessum angulorum incidentiæ). Nam  $\text{ang. KXL} = \text{ang. ALR} - \text{ang. AKN} = 2 \text{ ang. ACR} - 2 \text{ ang. ACN} = 2 \text{ ang. NCR}$ .

XIV. Pro Sequentibus hujusmodi *Lemma* proponemus: In triangulo quopiam ABC recta AD bisecet angulum BAC; dico fore  $AB + AC \sqsubset 2AD$ . Fig. 66.

In *Isocele* res clara est; in alio proinde sit  $AC \sqsubset AB$ , centròque A per B ducatur circulus BXY secans ipsam. AD in X, & AC in Y. Subtensa BX ducatur, ipsamque AC fecer in V; fiatque VT ad AD parallela. denuò subtensa XY connectatur. Et quoniam ang. XVC major est angulo XYV, vel angulo BXD, vel ipso  

H
BVT,

BVT, patet rectam VT angulum XVC secare. item ob angulum XYV obtusum, est  $XV \sqsubset XY = BX$ : ergo  $BV \sqsubset 2 BX$ ; &  $VT \sqsubset 2 XD$ . Verum ang. VTC (major ipso TVB, vel ipso DXB) est obtusus; adeoque  $VC \sqsubset VT$ ; itaque magis  $YC \sqsubset 2 XD$ . ergo  $AB + AY + YC \sqsubset 2 AX + 2 XD$ . hoc est  $AB + AC \sqsubset 2 AD$ : Q. E. D.

XV. Quò paralleli radii rectius (vel axi propinquius) incidunt, eò reflexorum concursus ad axem sibi viciniore sunt.

Fig. 67.

Nempe sumantur utcunque pares arcus NR, RX; & incidentium MN, QR, VX reflexi NK, RL, XM cum axe conveniant punctis K, L, M; erit  $ML \sqsubset LK$ . Nam connexæ CN, CR, CX rectæ ZY occurrant punctis  $\nu, \xi, \xi$ . Est itaque (juxta Lemma præcedens)  $C\xi + C\nu \sqsubset 2 C\xi$ ; hoc est,  $CM + CK \sqsubset 2 CL$ . quare  $CM - CL \sqsubset CL - CK$ ; hoc est  $ML \sqsubset LK$ : Q. E. D.

XVI. Exhinc patet axi propinquam lucem ab hujusmodi reflectione magis magisque constipari; maximè circa punctum Z, ubi perpendicularis iplius quasi reflexus terminatur. unde potissima constat ratio, quare concavis à speculis ad solem expositis circa punctum Z ignis accenditur; enimverò condensatior, inque spacium arctius quasi compressa lux validiorem exerit vim, ac efficaciam.

Fig. 68.

XVII. Quinetiam ex his confectatur, longinqui puncti imaginem oculo in axe constituta circa punctum Z consistere. Sit, inquam, BCO axis Opticus; oculique dianeter D<sup>d</sup> (in plana nempe circuli propositi sita) hujus autem extrema permeent reflexi NKD, VK<sup>d</sup> (ad incidentes MNP,  $\mu\nu\omega$  pertinentes). jam abunde manifestum est imaginem conspicuam intra KZ spatium versari. Nam alterius cujusvis. hinc, vel inde cadentis reflexus (seu ipsius RS, vel  $s\sigma$ ) oculum omnino transgredietur, adeoque nihil quicquam ad visionem ipsam, vel ad ejus quemcunque modum determinandum conferet; id autem omne meritò tribuetur radiorum intra peripheriam NV incidentium reflexis; qui scilicet oculum ingredientibus suo quisque modo visum aliquatenus afficiant. quoniam tamen ex his, qui propiores axi rectius incidunt oculo, magisque possent idcirco; nec non iidem propterea facilis ad unum in oculo punctum recolliguntur; præ cæteris etiam illi catervatim ingruunt; rationi consonum est isthic præsertim imaginem consistere; liquidem velut ab eo plures, ac efficacissimi radii videbuntur emanare. Subjicio, propter admodum exiguam pu-

pillæ

pillæ latitudinem, ipsum spatium  $KZ$  non ita magnum esse, quin instar *Puncti* possit censerī. Quibus expensis luculentè constare viderur propositum.

XVIII. Subdo tantum, si oculus usquam intra spatium  $ZB$  statuatur, visionem indè confusam, aut nullam evadere; quia nempe tunc reflexi præcipui (seu rectissimi) oculum convergentes appellent.

XIX. Ex his porrò facilè refelluntur, quæ de imaginis loco plenique tradunt omnes Optici; cum illis novissimus *Honor. Fabri*; juxta quorum doctrinam imago à puncto reflectionis tanto distat intervallo, quanto punctum radians ab eodem semovetur; ita quidem ut Sol ex hujusmodi reflectione conspicuus ad tantam, quantam directè spectatus, distantiam (eorum insistendo sententiæ) debeat apparere. quod immane quantum experientiæ refragatur. etenim si Soli exponatur *Speculum*  $RB$  (concavum, aut convexum) sic ut ei Sol quasi perpendiculariter immineat, oculûsque prope axem  $BC$  constituatur uspiam; ferè circa punctum  $Z$ , arbitrante sensu, luculenta Solis imago sese præbebit oculo conspiciendam; id quod juxta ratiocinium nostrum necessariò debuit evenire. verum hic error (in Opticâ capitalis, & quo non ablegato nulla phænomeni cujuscunque ratio verisimilis constabit) ubique se objiciet refutandum. hîc itaque pluribus parco; pergôque versùs oculum extra radiationis axem positum; postquam unicam hanc præcedentibus adnexam observationem subjecero.

XX. Majoris Sphæræ portio vehementiùs urit; ut & Objectum visibile clariùs atque distinctiùs repræsentat, quàm minoris æqualem obtinens latitudinem portio.

Super eandem nempe subtenfam  $NV$  insistant imparium circulorum segmenta  $NBV$ ,  $Nbv$ ; quorum axis  $AD$ ; & in hoc circulorum centra  $C, c$ ; constat ut minoris peripheriam  $Nbv$  extra majoris  $NBV$  jacere; ita majoris centrum  $C$  infra minoris centrum  $c$  existere. bisecentur jam Semidiametri  $CB, cb$  in  $Z, z$ ; ducanturque tangentes  $BT, bt$ ; hisque ductæ  $CN, cN$  occurrant punctis  $E, e$ ; denuò radii  $PN$  axi paralleli sit ad peripheriam  $NBV$  reflexus  $NK$ ; ad ipsam verò  $Nbv$  sit ejusdem reflexus  $Nk$ ; liquidissimè jam patet quòd sit  $Ne \ll NE$ ; hoc est quòd dupla  $zk$  major sit duplâ  $ZK$ ; adeoque simpla  $zk$  major simplâ  $ZK$ . majoris itaque Sphæræ portio strictiores intra terminos illabentem lucem cogit; adeoque potentius operatur; eademque de causa rem objectam illustrius atque

Fig. 69.

distinctius exhibet obtuenti . quod erat propositum ostendere . Et hæc quidem ad locum imaginis determinandum attinentia pleraque propter oculum in axe situm suffecerit attigisse . Superest ut idem oculi gratiâ secus constituti pertentemus . id operis sequenti deputamus.

## LECT. VII.

I. **I**D nunc agimus, ut ab infinito quoad sensum intervallo radiantis puncti, e reflectione circulem ad peripheriam peracta oriunda imaginis, oculi respectu præter axem siti, locum exquiramus. quocirca primum ipsa recta linea determinanda venit, in qua locus iste versatur; tum ipsissimum præcisè punctum est designandum. In primi verò propositi gratiam hoc *Problema* confici debet.

II. Dato circulo reflectente  $BNP$  (cujus centrum  $C$ ) rectæque  $CB$  positione data; designandus est huic parallelus radius, cujus reflexus per datum transeat punctum.

Fig. 70.

III. Si datum punctum (puta  $K$ ) in ipsa  $CB$  existat, facilimè peragitur negotium . nam si centro  $K$ , intervallo  $KC$  describatur circulus, ipsi reflectenti occurrens in  $N$ ; erit  $KN$  reflexus ducti ad  $CB$  paralleli; prout ex antedictis abunde perspicuum est.

Fig. 71.

IV. Si datum punctum (puta jam  $X$ ) in ipsa reflectentis circumferentia versetur; arcus trisectione statim exhauritur *Problema* . Nam ducatur  $XH$  ad  $BC$  parallela (quæ quidem ipsa uno modo problemati satisfacit) & interceptus arcus  $XH$  secetur punctis  $N$ ,  $P$ , ut sint arcus  $XN$ ,  $NP$ ,  $PH$  æquales inter se; connectanturque rectæ  $XN$ ,  $NP$ . dico factum . etenim ducantur  $CN$ ,  $XP$ ; & patet angulum  $CN X$  ipsi  $CNP$  æquari; adeoque fore  $XN$  reflexum ipsius  $PN$ ; quinetiam ang.  $NPX$  æquatur angulo  $HXP$ ; proindeque  $NP$  ipsi  $XH$ , hoc est ipsi  $BC$ , parallela est . itaque factum.

V. Verum

V. Verum extra casus hos, & particulares alios (mihi non incognitos, at nunc ἀπερορίστως) *Problema* magis solidum est; in summo quippe gradu tale; quatuorque subinde Solutiones admittens; perque lineam evolvi potest (ut alia pleraque, sicuti pridem adnotatum nobis.) sibi peculiarem; illam hoc modo quàm expeditissimè per puncta describendam: Per datum punctum X protendatur indefinitè recta GF. ad datam CB parallela; connectaturque recta XC; & super hanc ceu diametrum describatur circulus XICI. tum è puncto C prodeant quotcunque rectæ circulum XIC secantes punctis I, rectamque GF punctis H; & adsumantur in rectis CHI rectæ IN æquales interceptis IH (ita scilicet ut puncta I rectas NH perpetuò bisecent) perque puncta quotvis ejusmodi N traducta concipiatur linea; nimirum hæc (quæ certè nulla Sectio conica faciliùs delineatur) problematis nostri constructioni deservit, ejusque liquidò naturam patefacit; siquidem ejusce cum dati circuli intersectiones N (illæ verò subinde quatuor erunt, interdum tres (contactum enim intersectionibus adnumero) nonnunquam solummodò duæ; pro ut datus circulus magnitudine præditus est aliâ ac aliâ, quæ strictim adnoto tantum, animum advertenti manifestè constituta) possibiles quasque Solutiones exhibebunt. ducatur enim ab ipso X ad ejusmodi quamvis intersectionem N recta XN; & per N transeat MP ad BC parallela (vel ad GX) connexaque CN circulum XIC secet in I, rectamque GX in H; item jungatur XI. & quoniam è descriptæ lineæ naturâ seu constructione est  $IH = IN$ ; angulusque CIX, in Semicirculo, rectus est; erit  $XN = XH$ ; vel ang.  $XNI = \text{ang.} XHI$ . atqui ang.  $XHI$  alterno  $HNP$  par est. quapropter anguli  $XNI$ ,  $HNP$  pares sunt. adeoque recta NX ipsius NP reflexus erit. quod oportebat fieri. sic, inquam, enodari poterat id Problematis, at quoniam (ut innuebam supra) *Geometrarum palato minus sapiunt hujusmodi Problematum inusitata solutiones*; aliter id (satis breviter atque perspicuè) dabimus effectum hoc saltem eo faciens Lemmaticum Problema præmittentes.

Fig. 72.

VI. Dato circulo (cujus positione data diameter GF) & puncto C in ejusce circumferentia quoque dato; per hoc recta ducatur, cujus pars diametro circumferentiæque interjecta æquetur datæ rectæ Z.

Id sic exequimur. Connectatur recta CF; & huic perpendicularis ducatur recta FV; & accipiatur ad ipsas Z, GF tertia proportionalis P; & per G angulo CFV inferatur recta RS par ipsi P (id autem quomodo præstandum, edocuimus supra) tum per C ducatur

ducatur CHL ad RS parallela; erit intercepta HL (quod requiritur) æqualis ipsi Z. Nam connectatur CG; & huic perpendicularis ducatur GT; ad CF proinde parallela. quia jam ang. GCT = CGR = FSR, liquet rectangula trigona CGT, RFS assimilari. adeoque fore CT CG :: SR. SF. item (ob similitudinem triangulorum CGH, SFG) est CG. GH :: SF. FG. erit igitur ex æquo CT. GH :: SR. FG. (hoc est) :: FG. Z. verum est CT. FG :: CH. FH :: HG. HL. permutandoque CT. HG :: FG. HL. quare FG. Z :: FG. HL. liquet igitur HL ipsi Z datæ æquari: Q. E. F.

Plures esse casus possunt; ut nempe punctum L sit intra Semicirculum GCF (idque positum inter puncta C, G, vel inter ipsa C, F) vel in altero Semicirculo GEF, ultra GF sito respectu puncti C; sed hæc una constructio simul ac demonstratio pariter omnibus convenit; ut pluribus huc non sit opus.

Fig. 73, 74.

VII. Adnotetur saltem quoad istos casus, quòd sicuti per punctum G (ut antea commostratum) aliquando quatuor rectæ duci possunt datam adæquantes, rectisque FC, FV terminatæ; binæ scilicet inter angulum quò punctum G continetur, alteræque totidem extra ipsum; nonnunquam verò tres solæ; quum data recta minima continget esse cunctarum, quæ dicto punctum G continenti angulo possunt interfieri; subinde tantum duæ, quando data tali minimæ cedit; ita respectivè Problema jam expositum plures totidem solutiones accipit. Sanè quò major est hîc data Z, eò minor evadet intercepta RS; & vicissim quò minor RS, eò major ipsa IZ; unde si fuerit RS omnium minima, quæ angulo CFV punctum G capienti inferi possunt, etiam HL maxima erit è C prodeuntium rectarum, quæ inter diametrum GF, & Semicirculum GEF comprehendi possunt. unde *Perismatis* loco patet, è supradictis, quo pacto talis maxima duci possit; & hoc ipsum Problema penitus determinari. quod attendenti non obscurum innuisse satis videtur. jam ad principalis quæ sit resolutionem accedimus; ita jam brevitur propositi.

Fig. 73, 74.

VIII. Per datum punctum X rectam ducere, cujus reflexus datæ positione rectæ BC sit parallelus.

Id sic efficitur. Centro X per C describatur circulus GLFC; item per X ducatur GF ad BC parallela; tum ex C prjiciatur recta, cujus secundum Lemma mox præcedens, intercepta pars HL aquetur Semidiametro reflectentis circuli; quæ & illum fecit in N; ductæ

ductæ  $XN$  reflexus (puta  $NP$ ) ipsi  $BC$  parallelus erit. Nam connexis  $XC, XL$ ; quoniam  $CN = HL$ ; &  $CX = LX$ ; & anguli  $XCL, XLC$  pares sunt; erit  $XH = XN$ . quapropter erit  $NP$  ad  $XH$ , vel  $BC$  parallelus: *Q. E. F.*

IX. Ex hac constructione, cum præmissi lemmatis solutione collatâ dilucescet hujusmodi non ultra quatuor reflexos per idem quodcunque punctum, ceu  $X$ , transire; quorum duo ad unas axis partes incidentibus, reliqui ad alteras conveniunt. adparebit etiam si  $CN$  major sit, quam ut ei par  $HL$  rectâ  $GF$ , Semicirculôque  $GEF$  intercipi possit; quod ad axis partes, ad quas ipsum  $X$  ponitur, omnino nullus per hoc punctum reflexus meabit; quinetiam si  $CN$  tanta sit, ut ei par una tantum ejusmodi recta possit intercipi, quod unicus per ipsum  $X$  reflexus iter suscipiet. tales, inquam, expôsi problematis determinationes hanc constructionem haud obscure sequuntur; quas certè tu melius uno mentis (haud dormitantis) ictu perspexeris, quàm ego pluribus verbis explicâro.

Fig. 75.

X. Exhinc itaque denuò rectam (seu rectas) satis definivimus, in qua (vel in quibus) puncti radiantis Imago, respectu visûs utcunque positione datum centrum habentis, consistit. ad ejus jam præcisorem locum investigandum accingemur; in istarum rectâ quâpiam existentem.

XI. Huc adnotetur imprimis, quod si duorum ad easdem axis partes incidentium parallelorum ( $NP, RS$ ) reflexi sint  $N\omega, R\sigma$ ; erit arcus  $NR$ , vel  $PS$  arcus  $\omega\sigma$  subtripplus. Concurrent enim dicti reflexi in  $X$ ; & Connectatur recta  $R\omega$ . & quoniam, è præmonitis, angulus  $NXR$  duplus est anguli arcui  $NR$  ad centrum insistentis; erit idem angulus  $NXR$  anguli  $N\omega R$  quadruplus. quapropter erit ang.  $NXR$  — ang.  $N\omega R$  triplus anguli  $N\omega R$ , hoc est angulus  $XR\omega$  anguli  $N\omega R$  triplus. unde quoque triplus erit arcus  $\omega\sigma$  ipsius  $NR$ : *Q. E. D.*

Fig. 76.

XII. Iisdem stantibus dico fore  $RX$  (obliquioris reflexi partem incidentiæ concursusque punctis interceptam) majorem quadrante totius reflexi  $R\sigma$ . Nam, ductis subtensis  $NR, \omega\sigma$ ; erit  $1.3 :: \text{arc. } NR. \omega\sigma. \supset \text{recta } NR. \omega\sigma :: RX. X\omega \supset RX. X\sigma$  (quia scilicet est  $X\omega \supset X\sigma$ ). igitur est  $X\sigma$  minor triplâ  $RX$ ; componendôque minor erit  $R\sigma$  quadruplâ  $RX$ : *Q. E. D.*

XIII. Item

XIII. Item, dico fore  $NX$  (rectioris itidem reflexi concursus incidentiaque punctis interjectam partem) minorem quartâ parte totius  $N\sigma$ . Etenim fiat ang.  $HR\sigma = \text{ang. } N\sigma R$ ; quapropter erit  $HR = H\sigma$ ; adeoque  $2H\sigma = HR + H\sigma \subset R\sigma \subset N\sigma$ . item quoniam ang.  $RHN = 2 \text{ ang. } HR\sigma = \text{ang. } XRH$ ; est  $XH = XR \subset XN$ . quum itaque sit  $H\sigma$  major semisse totius  $N\sigma$ ; &  $XH$  major semisse residui  $NH$ ; liquet totam  $X\sigma$  majorem esse triplâ  $XN$ ; seu totam  $N\sigma$  majorem esse quadruplâ  $NX$ : Q. E. D.

XIV. Hinc perspicuum est, si fuerit  $NZ$  reflexi  $N\sigma$  quadrans, quod nullus alter hujusmodi reflexus punctum  $Z$  permeabit. Etenim alterius cujusvis reflexus permeare dicatur; erit igitur, si obliquior is fuerit,  $NZ \supset \frac{1}{4} N\sigma$ ; sin rectior fuerit, erit  $NZ \subset \frac{1}{4} N\sigma$  (nimirum è proximè demonstratis hæc consequuntur) quæ repugnant hypotheli.

Fig. 77.

XV. Quinetiam ipsi  $N\sigma$  propius adjacentium occurfus puncto  $Z$  viciniore sunt, hinc indè. Secent inquam, radiorum  $LM, RS$  reflexi  $L\mu, R\sigma$  ipsam  $N\sigma$  punctis  $Y, X$ ; istæ quidem (rectior) in  $Y$ , hic (obliquior) in  $X$ ; erit  $ZY \supset ZX$ . Nam connectantur  $R\sigma, L\sigma$ ; & fiat ang.  $\sigma LH = \text{ang. } N\sigma L$ ; ducanturque rectæ  $RH, RY$ . estque  $RH \subset LH = H\sigma$ ; adeoque ang.  $H\sigma R \subset \text{ang. } HR\sigma$ ; & proinde ang.  $NHR \supset 2 \text{ ang. } H\sigma R$ . item  $YR \subset YL = YH$ ; proindeque rursus ang.  $NYR \supset 2 \text{ ang. } YHR$ . quare multo minor est ang.  $NYR$  quadruplo  $N\sigma R$  est autem ang.  $NXR$  quadruplus anguli  $N\sigma R$ ; igitur ang.  $NXR \subset \text{ang. } NYR$ . ponatur jam, si fieri potest, punctum  $X$  ipsis  $Y, Z$  interjacere. erit igitur angulus externus  $NYR$  interno  $NXR$  major; atqui minor ostensus est. quæ repugnant. itaque potius est  $ZY \supset ZX$ : Q. E. D.

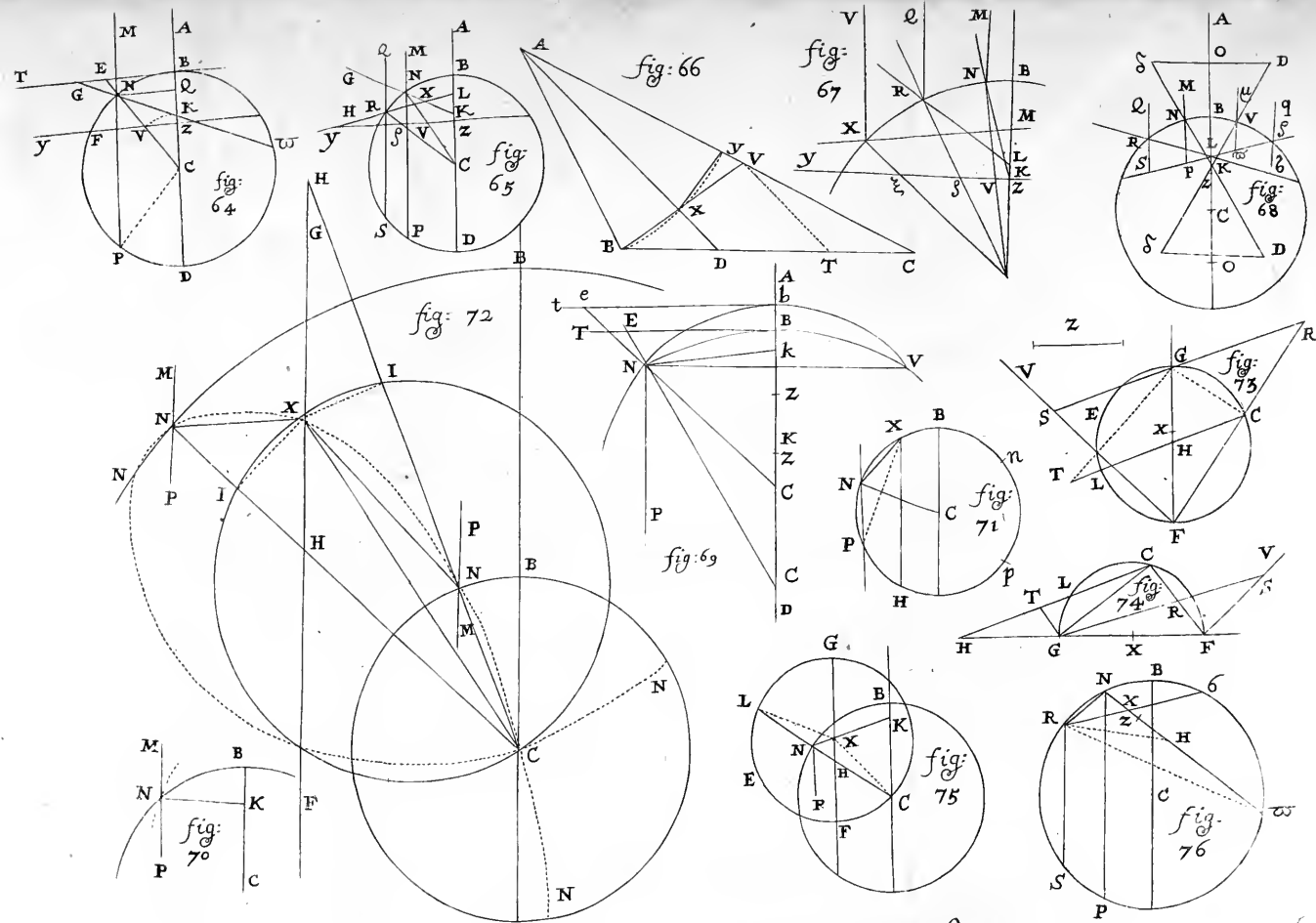
Ad alteras partes haud absimilis erit discursus; parco fastidiosæ repetitioni. ||

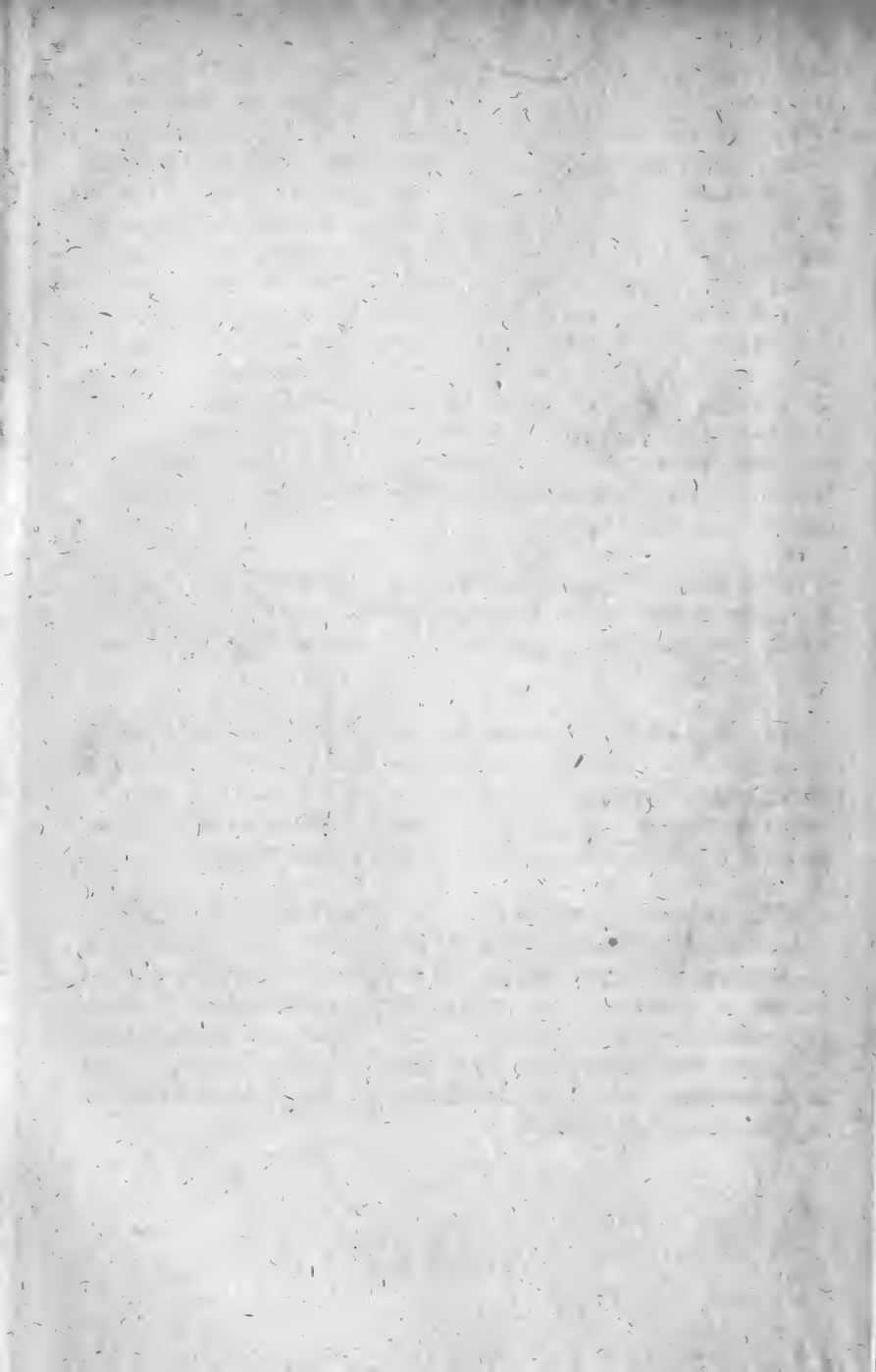
XVI. Hinc obiter patet ad easdem partes incidentium reflexos sefe prius (velut ad  $\phi$ ) quàm ipsum  $N\sigma$  decussare.

XVII. Quinimò rursus hinc constat ad easdem axis partes plures duobus in uno puncto reflexos non concurrere.

XVIII. Demùm (ut aliquando tandem destinatum attingamus scopum)  
è dictis







è dictis colligatur licet, quòd oculo, cujus Centrum O uspiam in ipsa N  $\sigma$  ponitur, circa punctum Z (ipsam N  $\sigma$  prænotato modo quadrifecans) radiantis imago conspicietur. Sit enim pupillæ (prout antehac aliquoties) diameter EF; per eujusce terminos transeant radiorum LM, RS reflexi LE, RF; quorum iste secet ipsum N  $\sigma$  in Y, hic in X. quoniam igitur radiorum obliquiorum ipso RS, rectorum ipso LM nullus oculum intrabit; uti supra non semel argumentati sumus, intra spatium XY necessario consistet imago. quinetiam cum radiorum arcui LR incidentium qui prope punctum Z reflectuntur axi N  $\sigma$  propius adjacentes perpendiculararius oculum feriunt, idque spissius (ut ex analogia par est existimare; nec enim id operosius aggrediar demonstrare) propter aliquoties expositas causas ab eo videbuntur obtutum afficientes radii promanare; hoc est ad ipsum imago consistet. Accedit quod ob angustiam pupillæ spatium XY satis modicum existit; ut puncti modum vix excedere videatur.

Fig. 78.

XIX. Subdo; si statuatur oculi centrum uspiam in ZN; isque versus partes N obvertatur; objectum confusus apparere; quippe cum reflexi visum convergentes appellant; vel quoniam imago Z tunc pone visum consistit.

XX. Hinc à speculo Cavo tantum una repræsentatur Imago, saltem bene distincta. Nam in duorum reflexorum N  $\sigma$ , R  $\sigma$  concursu X statuatur oculi centrum; & sit  $R\zeta = \frac{1}{4} R\sigma$ ; unde  $R\zeta \supset R X$ . itaque spectabitur quæ ad  $\zeta$  imago ab oculo in X collocato, versusque partes N R obverso; sed tum imago Z post oculum consistit.

XXI. Et hæc quidem rectè percepta, serioquæ perpenfa vix addubito quin facile sibi fidem conciliatura sint; nihil ut sit opus adversantia seu veterum Opticorum decreta, seu recentiorum Commenta pluribus convellere; quæ certè cum nullâ perspicuâ ratione nituntur, tum ab experientia plerumque discordant. Cætera verò siqua restant ad hoc argumentum spectantia studio vestro commendabimus elicienda; mox ad è sensibiliter finita distantia radiantis puncti *Symptomata* similiter exploranda animum adjecturi.

## LECT. VIII.

I **Q**uæ radiis obveniunt à longinquo puncto manantibus, adeoque quasi parallelis, ex reflectione peripheriam ad circula-rem peractâ; ubinam & quousque vel sibimet ipsis occurrunt, vel axem interfecant; quo loco radians oculo ubicunque constituto repræsentant, in postremis est dissertatum. ad punctum jam accedimus radios ejiciens sensibilibiter divergentes. Et hujusmodi quidem puncto, quanquam seu in obversas circuli Convexas partes seu ad concavas radiet communia pleraque symptomata conveniunt; tamen communi fræsus *Opticorum* exemplo, præsertimque majoris evidentiaæ causâ, casus istos distinctè prosequemur; illum fusiùs imprimis, hunc aliquanto concisiùs. ad rem.

II. In circuli BNP (cujus centrum C) convexum à puncto A quilibet incidat radius AN, isque reflectatur in NG; patet reflexum GN productum axi AC occursum. nam ductâ CNE patet GN productum angulum ANC fecare; nec non ideo trianguli ANC basin AC; puta in K; quo posito.

III. Dico fore  $AC \cdot AN :: KC \cdot KN$ . Nam ducatur KH ad CN parallela. est igitur ang.  $KHN = CNP = CNK = NKH$ . hoc etiam è superius generatim ostensis consequatur. adeoque  $NH = NK$ . itaque cum sit  $AC \cdot AN :: KC \cdot HN$ . erit etiam  $AC \cdot AN :: KC \cdot KN$ .

IV. Corollarii loco notetur (ductâ CP) fore  $NH = NK$ ; & triangula HNK, NCP assimilari; vel esse  $HK \cdot HN :: NP \cdot CN$ .

V. Porro, constantibus iisdem, dico fore  $AC \cdot KC :: ACq - ANq \cdot CNq$ . Nam est  $NP \cdot CN + AN \cdot CN = HK \cdot HN + AN \cdot CN = HK \times AN \cdot HN \times CN = AN \cdot HN$

+HK.CN.=AC.KC+AK.AC=AK.KC.verum est  
 NP.CN+AN.CN=NP×AN.CNq. ergo erit AK.  
 KC::NP×AN.CNq. componendoque AC.KC::NP  
 ×AN+CNq.CNq. cum sit igitur NP×AN=AP×AN  
 —ANq. & AP×AN=ACq—CNq; adeoque NP  
 ×AN+CNq=ACq—CNq—ANq+CNq;=ACq  
 —ANq. erit AC.KC::ACq—ANq.CNq: Quod E. D.  
 Coroll. AK.KC::AN×NP.CNq.

Fig. 79, 80.

VI. Etiam hoc *Theorema* subdemus: Si fiat 2 CA . CN ::  
 CN . E . & 2 CK . CN :: CN . F ; & fumatur CQ = E + F ;  
 erit ducta NQ ad CA perpendicularis . vel reciprocè ; posito quòd  
 sit NQ ad CA perpendicularis ; erit CQ = E + F . || Nam (ut  
 hoc posterius ostendamus ) quoniam est 2 CA . CN :: CN . E .  
 & CN . 2 CK :: F . CN . erit ex æquo perturbatè 2 CA . 2 CK  
 :: F . E . vel CA . CK :: F . E . componendoque CA + CK . CK  
 :: F + E . E . Porro quoniam est ANq = ACq + CNq — 2 AC  
 × CQ ; erit 2 AC × CQ — CNq = ACq — ANq . itaque  
 (juxta præcedentem) erit 2 AC × CQ — CNq . CNQ :: AC .  
 CK . hoc est ( ob CNq = 2 AC × E ) 2 AC × CQ — 2 AC  
 × E . 2 AC × E :: AC . CK . hoc est CQ — E . E :: AC . CK .  
 vel componendo CQ . E :: AC + CK . CK . erat autem AC  
 + CK . CK :: F + E . E . ergo CQ = F + E : Quod E . D .

VII. Ex istis porro deducetur , si dividatur Semidiameter BC in  
 Z, ut sit AC . AB :: CZ . BZ ; punctum Z limes erit citra quem  
 (respectu centri C) nullus hujusmodi reflexus axem decussabit . Cu-  
 jusvis, inquam, radii AN esto reflexus GN ; axi occurrens in K .  
 dico fore CK ⊥ CZ . Nam ob hypothesin (permutandoque) est AC .  
 CZ :: AB . BZ . igitur (antecedentes , & consequentes copulan-  
 do) AC . CZ :: AC + AB . CB . quare (posterioris hujusce  
 rationis utrumque terminum in æquales AC — AB , & BC ducen-  
 do) erit AC . CZ :: ACq — ABq . CBq . est autem ACq  
 — ABq ⊥ ACq — ANq ; adeoque ACq — ABq . CBq .  
 ⊥ ACq — ANq . CBq :: AC . CK (è mox ostensis hoc) qua-  
 propter erit AC . CZ ⊥ AC . CK . indeque CK ⊥ CZ : Fig. 81, 82.  
 Q. E. D .

VIII. Aliter hoc idem ; ut quibusdam fortasse videbitur , minùs  
 involatè : per N ducatur VT circulum contingens . & quoniam NT  
 I 2 bifecat

bifecat angulum ANK, erit AN.NK :: AT.TK.  $\Rightarrow$  AB.BK. quare BZ . AB + AN . NK  $\Rightarrow$  BZ . AB + AB . BK (communem adsciscendo rationem BZ ad AB.) . est autem BZ . AB + AN . NK = CZ . AC + AC . CK = CZ . CK & BZ . AB + AB . BK = BZ . BK. ergo CZ . CK  $\Rightarrow$  BZ . BK. permutandóque CZ . BZ  $\Rightarrow$  CK . BK. quin & componendo CB . BZ  $\Rightarrow$  CB . BK. ideóque BZ  $\subset$  BK; quare punctum Z centro propinquius est, quàm ipsum K: Q. E. D.

*Coroll.* Hinc si puncta Z,  $\zeta$  fuerint limites punctorum radiantium A,  $\alpha$  (quorum A sit à speculo remotius, quàm  $\alpha$ ) erit CZ  $\Rightarrow$  C $\zeta$ . Nam est BC . AB  $\Rightarrow$  BC,  $\alpha$  B. adeóque compositè AC . AB  $\Rightarrow$   $\alpha$  C .  $\alpha$  B. hoc est CZ . BZ  $\Rightarrow$  C $\zeta$  . B $\zeta$ . quare componendo BC . BZ  $\Rightarrow$  BC . B $\zeta$ . & indè BZ  $\subset$  B $\zeta$ .

IX. Porro, confectatur è præmissis, quòd si duorum quorumvis incidentium AN, AR reflexi GN, HR axem interfecerint punctis K, L; erit CL, CK :: ACq — ANq . ACq — ARq. || Nam quoniam est AC . CK :: ACq — ANq . CBq. itémque CL . AC :: CBq . ACq — ARq. erit ex æquo perturbatè CL . CK :: ACq — ANq . ACq — ARq.

X. Simili planè discursu, si fuerit AC . AB :: CZ . ZB? erit CZ . CK :: ACq — ANq . ACq — ABq. & CL . CZ :: ACq — ARq . ACq — ABq.

XI. Hinc perspicuum est obliquioris reflexi concursum à centro magis elongari quàm rectoris; quòd nempe sit CL  $\subset$  CK. Cum enim sit ACq — ANq  $\subset$  ACq — ARq; erit CL  $\subset$  CK.

XII. Hinc necessariò duo quilibet ad easdem axis partes incidentium reflexi (quales NK, RL) sese priùs quàm axem interfecabunt, puta ad X. quo posito.

XIII. Adnotari potest angulum GXH vel KXL (à reflexis occurrentibus inclusum) æquari angulo NCR unà cum differentia angulorum incidentiæ, vel duplo angulo NCR unà cum ang. AR. || Etenim ang. KXE = ang. ALR — AKN = ang. ACR + CRL —; ang. ACN + CNK = ang. ACR — ACN +; ang. CRL — CNK = ang. NCR +; ang. CRS — CNP. || Quinetiam ang. CRS — CNP = ang. RCA + CAR —; ang. NCA + CAN

CAN = ang. NCR + NAR . itaque rursus ang. KXL = 2 ang. NCR + ang. NAR . liquent igitur quæ proposita sunt ; in usum (si fortè) sequentium . pro quibus itidem hæc proponenda sunt.

XIV. Etiam palàm est è dictis ipsos reflexos GN, HR directè Fig. 83. procurentes à se divergere ; adeoque duntaxat unum hujusmodi reflexum oculi centrum transire ; consequenter & puncti A tantum unam à convexo speculo imaginem exhiberi.

XV. *Lemmatia* 1. Sint quæcunque tria quanta A, P, C ; primòque sit A. B ⊂ B. C ; dico fore A + C ⊂ 2 B. ponatur enim fore A. B :: B. E . erit ergò A + E ⊂ 2 B. quinetiam erit ergò B. E ⊂ B. C adeoque C ⊂ E. ergò magis A + C ⊂ 2 B.

2. Sit (iisdem adhibitis quantis) secundo A + C ⊃ 2 B. dico fore A. B ⊃ B. C . nam sive dicatur esse A. B :: B. C . vel A. B ⊂ B. C . sequetur utrobique fore A + C ⊂ 2 B ; contra hypothesin . itaque potius est A. B ⊃ B. C .

XVI. Etiam hoc adjungo . Si duo sumantur ad easdem axi partes Fig. 84. (circulique convexâ parte comprehensi) sibimet æquales arcus NR, RX ; & ducantur rectæ AN, AR, AX ; erit ANq + AXq ⊂ 2 ARq .

Nam ducantur CN, CR, CX ; & demittantur ad AC perpendiculares NE, RF, XG ; sint item NP, RQ ad AC parallelæ ducanturque subtensæ NR, RX . ; & quoniam ang. RXQ ⊂ ang. NR'P ; patet esse RX . RQ ⊃ NR . NP ; adeoque cum RX = NR . erit RQ ⊂ NP ; hoc est FG ⊂ EF . ergò 2 CF ⊂ CE + CG ; unde 4 AC × CF ⊂ 2 AC × CE + 2 AC × CG atqui est ANq = ACq + CNq - 2 AC × CE . & AXq = ACq + CNq - 2 AC × CG . & 2 ARq = 2 ACq + 2 CNq - 4 AC × CF . ergò ANq + AXq ⊂ 2 ARq .

Addo , sequentium gratiâ ; si punctum A sumatur ad alteras (infra centrum) partes ; & reliqua similiter apparentur ; fore contrâ , tum ANq + AXq ⊃ 2 ARq . nam in eo casu est ANq + AXq = 2 ACq + 2 CNq + 2 AC × CE + 2 AC × CG . & 2 ARq = 2 ACq + 2 CNq + 4 AC × CF . unde liquet propositum.

XVII. Sint jam ad easdem axis partes duo quilibet æquales arcus NR ,

Fig. 85.

NR, RX; & incidentim AN, AR, AX reflexi GN, HR, IX  
axi occurrant producti punctis K, L, M; erit intervallum ML ab  
obliquorum occurribus conclusum majus ipso LK rectorum occurri-  
bus intercepto.

Nam quoniam est  $ANq \dashv AXq \sqsubset 2 ARq$ . erit  $2 ACq$   
 $\dashv ANq \dashv AXq \supset 2 ACq \dashv 2 ARq$ . adeoque  $ACq \dashv$   
 $\dashv AXq$ .  $ACq \dashv ARq \supset ACq \dashv ARq$ .  $ACq \dashv ANq$ .  
hoc est, e præmonstratis,  $CL \cdot CM \supset CK$ .  $CL$ ; vel inversè  
 $CM \cdot CL \sqsubset CL \cdot CK$ . quapropter erit  $CM + CK \sqsubset 2 CL$ .  
& ideò  $CM \dashv CL \sqsubset CL \dashv CK$  hoc est  $ML \sqsubset LK$ :  
Q. E. D.

XVIII. Hinc constat, etiam in hac hypothesi, rectius incidentem  
lucem à reflectione magis inspissari; seu spatio versus limitem Z arcti-  
ore constringi.

Fig. 85.

XIX. Quin ab his demum omnibus colligitur, si uspiam in axe  
(velut ad O) constituatur oculi centrum, quod punctum A necessa-  
riò circa limitem Z apparebit. Etenim (prorsus ut in præcedente  
quoad radios ab infinitè distito puncto manantes hypothesi) ab axis  
illi puncto adjacente parte radii cum copiosiores, tum axi viciniore,  
oculòque rectiores, efficaciam proinde præpollentes, nec non qui  
faciliùs re-adunentur, provenire videntur. quæ nempe cuncta simul  
ac emergentem propositi consequentiam abunde, puto, dedimus  
enucleata. Succedit ut hâc parte defuncti pro visu extra radiationis  
axem collocato iidem imaginis sedem definiamus. veruntamen hæc,  
quanquam haud ità quantitate multa, pro rei tamen obscuritate for-  
tassis nimia videbuntur. itaque jam opportunum autumo desistere.



## LECT. IX.

I. **Q**ualiter in obversum Speculi circularis convexum finitè distans punctum radiat, & ubi loci adparet oculo in recta constituto per ipsum radians & speculi centrum trajecta postremo con- nifi demonstrare; nunc idem quoad aspectum aliàs ubicunque situm aggredimur expiscari. quò primum attinet ut rectam investigemus, in qua consistet Imago; tum ut punctum ejus in ista recta præcisum determinemus. & primo quidem negotio satisfactum erit hujusmodi *Problema* conficiendo; quod (sequentium quoque gratiâ) genera- tim proponimus.

II. *Dato circulo reflectente (cujus centrum C) datisque binis pun- ctis; ab horum uno recta ducatur, cujus reflexus per alterum tran- seat.*

1. Si data puncta (puta A, X) sint ambo in circuli peripheria, Fig. 86. manifestum est bisecto arcu AX in N, connexisque subtensis NA, NX, rectas NA, NX sibi mutuò reflexas fore; seu, junctâ CN, angulum CNX angulo CNA æquari.

2. Etiam si datorum unum (X) in circumferentia ponatur; liquet, Fig. 87. connexis AX, CX, factoque angulo CXH = CXA, fore XA, XH alterum alterius reflexum.

3. Item si data puncta (A, X) æqualiter à centro distent; con- nexis rectis AC, XC, bisectoquo angulo XCA à recta CN circuli reflectentem intersecante ad N; perspicuum est conjunctas rectas AN, XN, invicem in se reflecti; vel angulum CNX ipsi CNA æquari. Fig. 88.

III. 4. Si puncta data (puta jam A, K) ambo existant in recta per reflectentis centrum transeunte (nempe ABKC.)

1. Fiat CK.AC :: CB.T. ac inter CB, & T fit proportione Fig. 89. media V (unde CBq.Vq :: CB.T :: CK.AC). tum centro A, intervallo  $\sqrt{:: ACq - Vq}$ . describatur circulus reflectentem

secans in N; & per N ducatur KNG; hæc ipsius AN reflexa erit.

Fig. 89.

Nam ob  $ANq = ACq - Vq$ . erit  $Vq = ACq - ANq$ . adeoque  $CBq : ACq - ANq :: (CBq : Vq ::) CK : AC$ . quod, è præmonstratis, reflectioni proprium est. ergò liquet propositum.

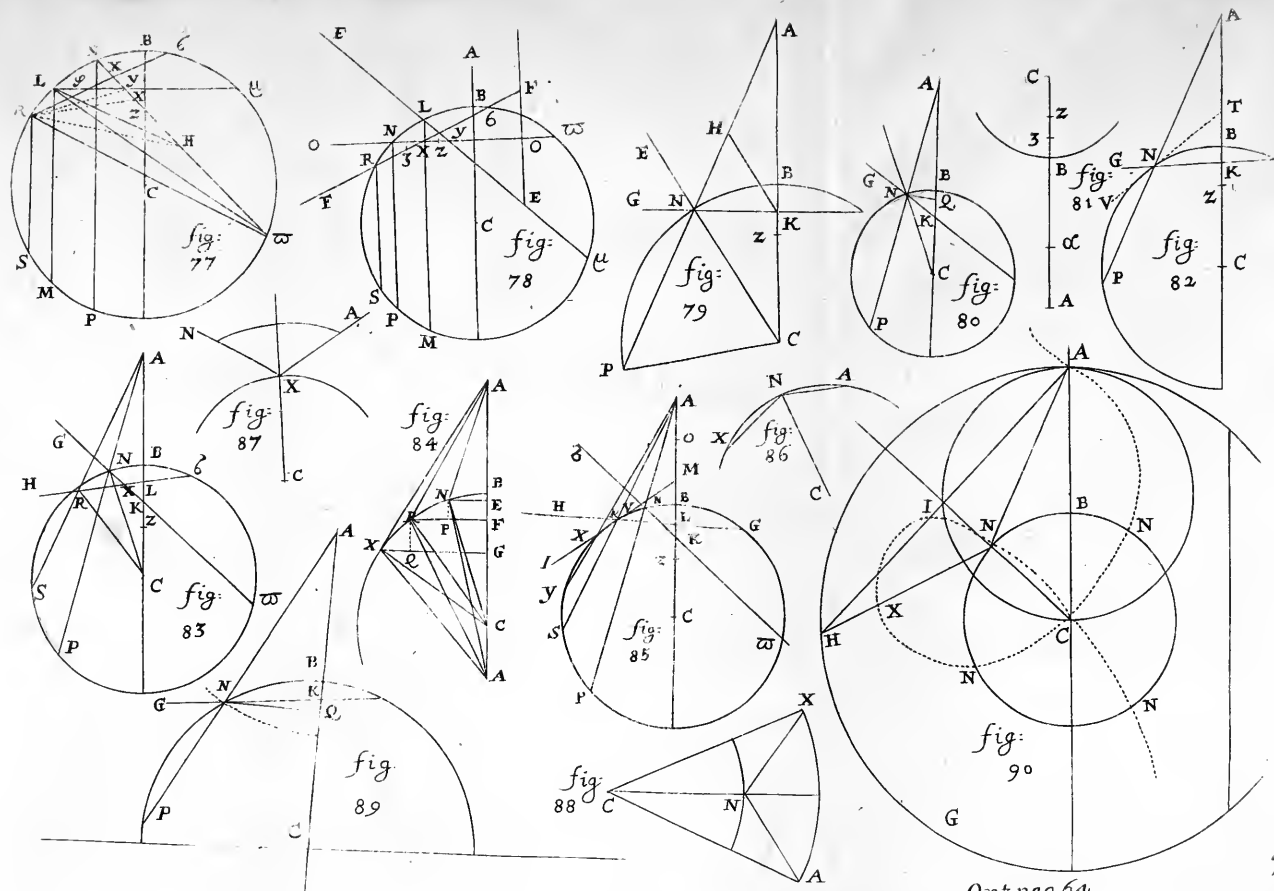
2. Ità quidem in hoc casu; at si punctum A ponatur aliàs, ut sit  $AC \perp AN$ ; reliquis stantibus, Sumendum erit intervallum  $AN = \sqrt{ACq - Vq}$ ; ut sit  $ANq - ACq = Vq$ . ut posthac constabit, ubi de concavis agemus. Aliter hoc idem. Fiat 2 CK.  $CB :: CB.E. \& 2 CA.CB :: CB.E.$  sumaturque  $CQ = E + F$ . & ducta QN ad AC perpendicularis circulum secet in N. connexæ AN, KN altera alterius reflexa erit. hoc è suprà dictis liquidò consecutur. At si fuerit  $AN \perp AC$ ; tum accipi debet  $CQ = F - E$ ; & (reliquis nihil immutatis, uti postmodum apparebit) factum erit.

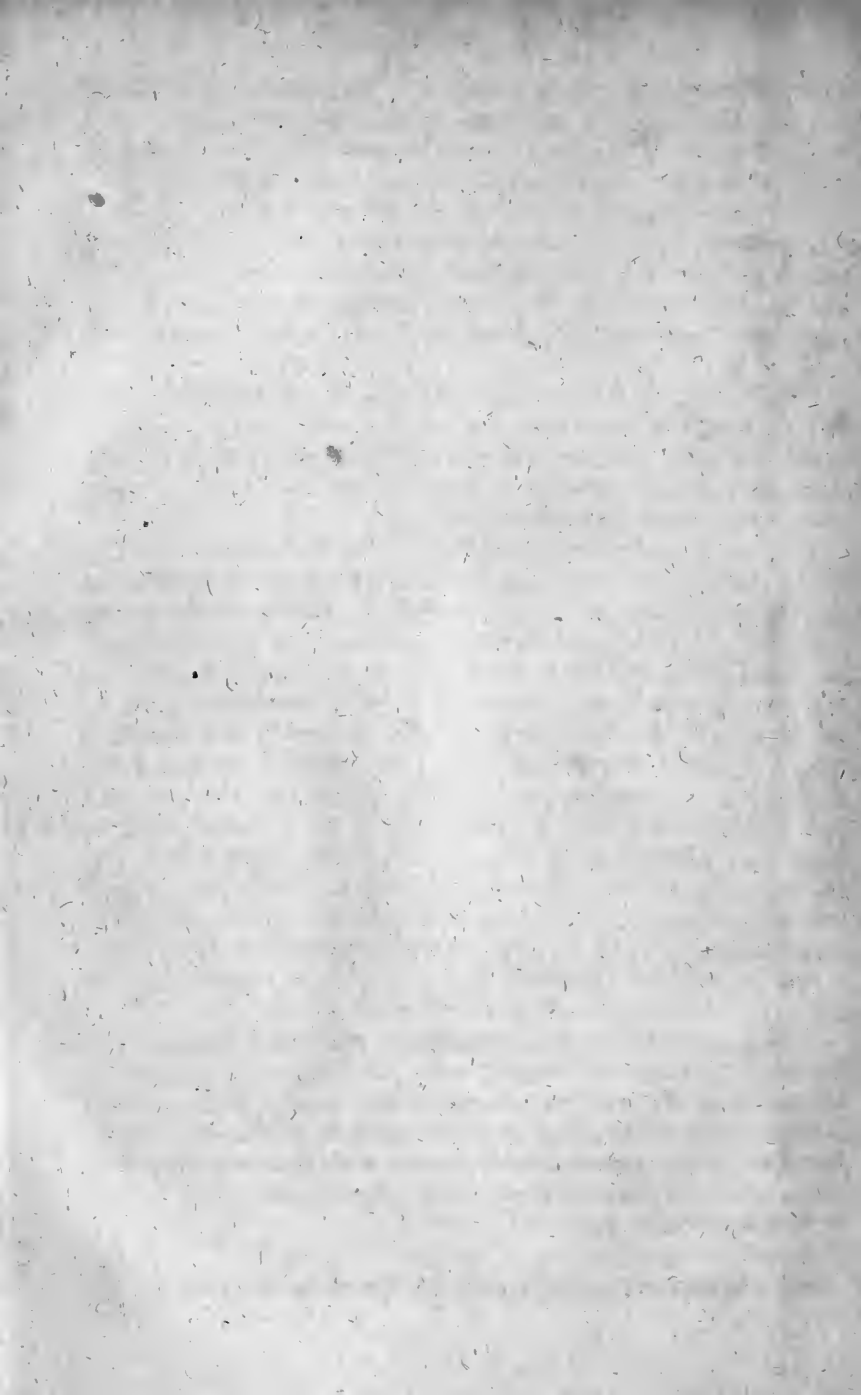
IV. Intra casus hos *Problema*, ceu videtis, facilè construitur; aut illos; aliòsque speciales, si qui sunt, excipiendo, generaliter conceptum omnino Solidum est, & certè *δυσκολον*; vix ut aliud à *Geometris* hæctenus attentatum difficilius reperiatur. Et primò quidem per lineam extrui, explicarique poterit sibi peculiarem, hoc vel adsimili modo describendam.

Connexâ CA, super diametrum CA describatur circulus AIC; item semidiametro CA describatur alter circulus AHG. tum à C educantur rectæ quotvis CI circulum AIC secantes punctis I; & per A, I ductæ rectæ circulum AHG secant punctis H; demum per H, & X rectæ ducantur ipsas CI decussantes punctis N. per hujusmodi puncta quævis designabilia transibit linea, *Problematis* expositi solutioni accommodata. Sit enim ejus, ac reflectentis circuli quævis intersecctio N (qualium certè pro reflectentis circuli magnitudine subinde quatuor, aliquando tres, modò binæ tantum erunt) & connectatur AN. Et quoniam angulus CIA in Semicirculo rectus est, erit recta AH bisecta in I. adeoque triangula ANI, HNI sibi met æqualia prorsus & æquiangala erunt; & speciatim ang.  $INA = \text{ang.} INX$ . unde patet propositum.

Fig. 90.

V. Verùm quoniam (ut pridem admonitum) hujusmodi constructiones, etsi longè faciliores iis quæ per vulgò receptas lineas peraguntur, & *Problematum* naturam magis in propatulo collocantes à *Geometris* nihilo-





nihilominus gravatim admittuntur; istâ tantummodò raptim insinuatâ, subnectemus aliam ab illorum gustu non abhorrentem; illam nempe (quando scilicet haud alia melior, ut varias pertentans analyses, & hoc in alia complura *Problemata* transformans existimari possum, facilè possit excogitari; quum & operæ meæ satis alioquin exercitatae nonnunquam videatur parcendum) quam olim *Alhazen* *Arabs* scriptis commendavit; ab horribili tamen illâ prolixitate simul ac obscuritate; neque non ab incondita sermonis barbarie nonnihil repurgatam. quorsum hoc præmittimus *Lemmaicum Problema*.

VI. Trianguli  $DPN$  angulus ad  $P$  rectus sit; & in hujus uno crure  $PN$  adsignetur punctum  $F$ ; per  $F$  recta ducenda est, quæ reliquam latus  $DP$  (protractam nempe) ac hypotenusam  $DN$  ita secet, ut ab illis intercepta ad segmentum hypotenusæ lateri primò conterminum datam obtineat proportionem  $R$  ad  $S$ .

Fig. 91.

Hoc ita peragatur licet. Ducatur  $FH$  ad  $PD$  parallela. & Diametro  $HN$  describatur Circulus  $HFN$  (is nempe per  $F$  transibit, ob angulum  $HFN$  rectum) tum connectatur  $DF$ ; & fiat angulus  $FHI = \text{ang. } FDN$ . sit etiam  $R.S.::D.F.T.$  & à puncto  $I$  ducatur recta  $ILK$  diametrum  $HN$  interfecans ad  $L$ , & circulo occurrens in  $K$ , ita quidem ut sit intercepta  $LK = T$  (hoc autem quomodo præstetur in superioribus ostensum) denuò per puncta  $KF$  trajiciatur recta  $CF$ , ipsam  $DP$  secans in  $X$ . Dico factum, vel ipse  $CX$ .  $CN.::R.S.$  connectatur enim recta  $NK$ . & quoniam  $\text{ang. } FKI$  (vel  $FHI$ )  $= FDN$ , erit triangulum  $FDC$  simile triangulo  $LKC$ , ac inde  $FD.DC::KL.CK$ . item ob  $\text{ang. } FKN = \text{ang. } FHN = \text{ang. } XDC$ , erunt triangula  $XDC$ ,  $NKC$  sibi quoque similia, proindeque  $DC.CX::CK.CN$ . quapropter erit ex æquali  $FD.CX::KL.CN$ . vel permutando  $FD.CK::CX.CN$ ; hoc est  $FD.T$  (vel  $R.S$ )  $::CX.CN$ ; quod faciendum erat.

Constr. &

Advertendum est autem, quod datum punctum  $F$  in recta  $PN$  indefinitè protensa variè statui potest; vel nimirum inter puncta  $P$ ,  $N$ ; vel extra illa partes ad alterutras. item quòd in istorum casuum singulo quoque recta  $IK$  (conditione gaudens præstiturâ) plurifariam duci potest; ut antehac inculcatum; unde plures emergent solutiones. at quoad omnes casus persimilis erit constructio, nec ferè diversa demonstratio. quare cur plura?

VIII. Proponatur jam circulus reflectens (is qui præ oculis, cujus

K

cen-

centrum C) datâque sint duo puncta A, X; reperiendum est in circumferentia punctum aliquod; à quo ductæ ad A, X rectæ, altera sit alterius reflexa. || Hoc ita perficimus:

Fig. 92, 93.

Conjungantur rectæ A C, X C; & fiat (seorsim) ang.  $\delta = \frac{1}{2}$  ang. A C X. & in  $\xi \delta$  crure anguli  $\delta$  sumpto liberè puncto  $\sigma$  ducatur  $\sigma V$  ad  $\xi \delta$  perpendicularis alterum crus secans in V; & in V  $\sigma$  protracta capiatur  $\sigma \gamma = \sigma V$ ; tum dividatur  $\gamma V$  in  $\phi$ , ut sit  $\gamma \phi : \phi V :: X C : C A$ ; perque punctum  $\phi$  trajiciatur  $\kappa \xi$  sic ut sit  $\kappa \xi : \kappa V :: C X : C N$ . denique fiat angulus X C N æqualis angulo  $\xi \kappa V$ ; erit punctum N quale desideramus. Nam ducantur X N,  $\xi V$ ; & fiat ang. C N G = ang.  $\kappa \gamma$ . adsumaturque P G = P N; & connectatur X G. liquet jam triangula X C N,  $\xi \kappa V$  similia fore; nec non ipsa C N F,  $\kappa V \phi$ ; & ipsa X P F,  $\xi \sigma \phi$ ; ipsâque demùm X F N,  $\xi \phi V$  assimilari. quare P F . X F ::  $\sigma \phi$  .  $\xi \phi$ . & X F . F N ::  $\xi \phi$  .  $\phi V$ . & ex æquo P F . F N ::  $\sigma \phi$  .  $\phi V$ . & antecedentes duplando 2 P F . F N :: 2  $\sigma \phi$  .  $\phi V$ . componendôque 2 P F + F N . F N :: 2  $\sigma \phi$  +  $\phi V$  .  $\phi V$ . hoc est G F . F N ::  $\gamma \phi$  .  $\phi V$  (hoc est) :: X C . C A. ducatur jam N L ad X G parallela; quare est ang. L N G = ang. G = ang. X N G; & X G (X N) . N L :: G F . F N :: X C . C A. porro fiat ang. L N H = ang. X C A; & H N protracta ipsi C A occurrat in M; estque propterea triangulum H N L simile triangulo H G M; idcircoque H C . C M :: H N . N L. ducatur denuo tangens N Q; estque tum ang. P N Q = rect — C N P = rect —  $\kappa V \sigma$  = ang.  $\delta = \frac{1}{2}$  X C A; vel 2 ang. P N Q = ang X C A = ang L N H. verum erat prius 2 ang. X N F = ang. X N L. ergo 2 ang X N F — 2 ang P N Q = ang X N L — ang. L N H. hoc est 2 ang X N Q = ang. X N H. ergo tangens N Q bifecat angulum X N H; indeque confectatur fore rectam H M ipsius X N reflexam; ac idè esse X C . H C :: X N . H N. atqui fuit prius H C . C M :: H N . N L quare jam erit ex æquo X C . C M :: X N . N L. (hoc est etiam è præmonstratis) :: X C . C A. unde C M = C A. quapropter H M, ipsius X N reflexa transit per A: Quod propositum erat efficere. ||

VIII. Hujusce *Problematis* ita generalius propositi varii quidem casus sunt (etenim vel data puncta jacent ambo extra circulum reflectentem; vel utrumque positum est intra circulum; vel unum intra jacet, alterum extra; quin etiam in horum casuum unoquoque pluries conficitur negotium) ast ubique non absimilis erit constructio; sanè nimius essem; meamque pariter ac vestram patientiam macerarem omnes intricati *Problematis* nodos evolvendo; suffecerit ejusce specimen aliquod protulisse.

IX Adnota-

IX. Adnotabimus tantum quod ex *Problematis* hujusce natura constructioneque proposita satis attendenti constabit (utique sicut in *Hypothesibus* antehac tractatis uberius est declaratum) duorum tantum ad easdem axis partes incidentium reflexos ad unum sese punctum decussare. nam aliorum unius (qui subinde potest dari) vel alterius reflexi per ejusmodi punctum transeuntes ad alteris partibus incidentes pertinebunt. || Ex his quadantenus elucescit datis puncti radiantis, oculique positione designari potest linea quævis, in qua dicti puncti species apparebit; incumbit proximè punctum in ea præcisum determinare, ad quo eadem consistit. eo spectat hoc Theoremation.

X. Ab eodem quocunque puncto A manantes duo radii AN, AR Fig. 95, 96 in circuli reflectentis peripheria præter illum arcum NR (qui incidentiæ punctis interjacent) interceptiant arcum PS; eorum verò reflexi interceptiant arcum  $\sigma\sigma$ ; erit arcus  $\sigma\sigma$  æqualis Summæ vel differentiæ dupli arcus NR, & arcus PS. Nam (1) in prima figura; est  $PS + SR + RN = PN = N\sigma = \sigma\sigma + \sigma R - RN$ ; ergo, pares hinc inde SR, &  $\sigma R$  subducendo, erit  $PS + RN = \sigma\sigma - RN$ . proindeque  $PS + 2 RN = \sigma\sigma$ . (2). in altera figura; erit  $PS + SR - RN = PN = N\sigma = RN + R\sigma - \sigma\sigma$ . quare rursus æquales auferendo SR,  $R\sigma$  manebit  $PS - RN = RN - \sigma\sigma$  unde transponendo erit  $\sigma\sigma = 2 RN - PS$ .

XI. Etiam hoc *Lemmatum* adscribemus: Bifecetur recta NP in E; Fig. 94 & ubivis sumatur punctum A; erit  $EA = \frac{PA \pm NA}{2}$ . Nam  

$$EA = \frac{PN}{2} \pm AN = \frac{PN \pm 2 AN}{2} = \frac{PA \pm AN}{2}$$

XII. Exhinc, ut propositum citius attingamus, Supposito radios AN, AR (quoad casum præsentem) sibi quam proximos incidere, punctum designabimus ad quod ipsorum reflexi  $N\sigma$ ,  $R\sigma$  concurrunt; dicimus utique si dicti reflexi concurrant ad Z; bisectis subtensis NP,  $N\sigma$  in E, & F; fore  $FZ . ZN :: EA . NA$ . || Nam quoniam arcus NR, PS ex hypothesi sunt indefinitè parvi (seu minimi) se habebunt ut suæ subtensæ; nec non idem de arcubus NR,  $\sigma\sigma$  dici potest. igitur arc. PS. RN :: PS. RN :: PA . RA. (hoc est ob RA, NA nihil, ex eadem hypothesi, differentes) :: PA . NA. ergo, bis componendo, erit  $PS + 2 RN . RN :: PA + 2 NA . NA$ .  

K 2
hoc

hoc est  $\sigma\omega.RN::PA+2NA.NA.$  est autem arc  $\sigma\omega.RN::$  subtensa  $\sigma\omega.RN::\omega Z.ZR::\omega Z.ZN.$  ergo  $\omega Z.ZN::PA+2NA.NA.$  & componendo  $\omega N.ZN::PA+3NA.NA$  & antecedentes subduplando  $FN.ZN::\frac{PA+3NA}{2}.NA.$  denique dividendo  $FZ.ZN::\frac{PA+NA}{2}.NA.$  est autem  $EA=\frac{PA+NA}{2}.$  ergò tandem est  $FZ.ZN::EA.NA:Q.E.D.$

Fig. 95, 96. XIII. Hinc colligitur punctum Z esse locum ipsissimum, circa quem puncti Z imago consistit; oculi respectu in reflexo GN $\omega$  constituti, tanquam ad O. etenim superius nec semel argumentis, ut mihi videtur, admodum luculentis adfirmatum est (ut jam ad instar regulæ legisve ratum, fixumque censi queat) isthic imaginem versari, ubi propiorum incidenti principali (hoc est ei cujus reflexus oculi centrum transiens axis Optici vicem subit) radiorum reflexi principalem illum reflexum interfecant; itaque circa Z in hoc casu versatur.

XIV. Et hoc argumentatione collegi, non illâ quidem incertâ vel ambiguâ, sed nec ad *Geometrici* rigoris amussim præ illa quam in præcedentibus usurpavi (quanquam & hæc è cognatis fontibus profluxerit) adeò exactâ, concisâ tamen, & facili, talique quæ conclusionis adfertæ causam apprimè detegit. Enim verò si pleraque cuncta, quæ se oggerunt huc attinentia, minutatim ac morosè persequi vellem, immane quantum tædii (commodo vestro fortassè non tanto) mihi met accerferem, & temporis plurimum vestri pariter ac mei exaurirem. suffecerit itaque jam, & posthac in reliquis Hypothesibus sufficiat, viâ quàm brevissimâ (modo tamen certissimâ) metam attingere. De convexis hætenus, ad concava proximè nos conferemus, aliquanto brevius exponenda. ||



## L E C T. X.

I. **I**N postrema Lectione quod spectavimus punctum circuli convexo alluxit; nunc partes concavas irradians aliud, at magis *ενανθεν*, contemplabimur. & quidem casuum præcipuorum diversitatem imprimis distinguemus. Nempe radiet punctum A in circulum reflectentem, cujus centrum C; connexaque recta AC protendatur indefinitè; quo posito.

II. 1. Incidat radius AN; & sit  $AN = AC$ ; erit ipsius AN reflexus, puta  $N\alpha$ , ad AC parallelus.

Fig. 97.

Hoc è suprà generatim ostensis constat; & facillè jam patet, connexâ CA. etenim est ang.  $ACN = ANC$ ; ob AC, AN, ex Hypothesi pares; & ang.  $ANC = \alpha NC$ , propter reflectionem; adeoque ang.  $ACN = \alpha NC$ ; unde sunt AC,  $N\alpha$  sibi parallelæ.

III. 2. Incidat radius AM major ipsâ AC; ejus reflexus (puta  $M\alpha$ ) cum axe directè procedens conveniet ultra centrum, respectu puncti A; (hoc est centrum C puncto radianti, concursuque interjacebit).

Fig. 98.

Nam ob  $AM > AC$ , erit ang.  $ACM < AMC = CM\alpha$ . ergo ang.  $BCM + CM\alpha > \text{ang. } BCM + ACM = 2 \text{ rect.}$  quare  $M\alpha$ , CB convenient infra CM ad partes  $\alpha B$ ; velut ad K.

IV. 3. Incidat radius AR; & sit AR minor ipsâ AC; ejus reflexus, puta  $R\alpha$ , axi retrò protractus occurret. (hoc est ut radians centro; concursuque sit interjectum).

Fig. 99.

Nam hic ob  $AR < AC$ , erit ang.  $ACR > \text{ang. } ARC = \text{ang. } \alpha RC$ . quapropter ang.  $DCR + \alpha RC < 2 \text{ rect.}$  unde patet ipsas DC,  $\alpha R$  portectas infra CR concurrere.

Fig. 101.

Fig. 100.

V. Horum casuum primus ad unam duntaxat ab una axis parte radi-  
um pertinet, qui reliquos aliis casibus convenientes medius determinat.  
de posteribus itaque duobus separatim paullò dispiciamus; Sit jam  
itaque primò  $AC = AG = Ay$ ; unde quilibet incidens cavo  $GB$   
radius (ut  $AN$ ) major erit quam  $AC$ ; hujus itaque reflexus axem  
fecit puncto  $K$ ; dico, si semidiameter  $CB$  dividatur in  $Z$ ; ut sit  $CZ$ .  
 $ZB :: AC . AB$ ; fore  $CK \sqsubset CZ$ . etenim ob angulum  $ANK$   
bifectum, erit  $AC . CK :: AN . NK$ . vel permutando  $AC . AN$   
 $:: CK . NK$ . est autem  $AC . AB \supset AC . AN$  ergo  $AC . AB$   
 $\supset CK . NK \supset CK . BK$ . ergò cum sit, ex hypothesi,  $CZ . ZB$   
 $:: AC . AB$ ; erit  $CZ . ZB \supset CK . BK$ . componendòque  $CB$ .  
 $ZB \supset CB . KB$ . unde  $ZB \sqsubset KB$ ; seu  $CZ \supset CK : Q$ .  
 $E . D$ .

VI. Hinc punctum  $Z$  est limes infra quem, Versus centrum, nullus  
reflexus axem intersecat.

*Coroll.* Hinc si puncta  $Z, z$  sint limites punctorum  $A, a$  (quorum  
 $A$  remotius) erit  $CZ \sqsubset Cz$ .

Nam  $BC . AC \supset BC . aC$ . componendòque  $AB . AC \supset$   
 $aB . aC$ . hoc est  $ZB . ZC \supset zB . zC$ . vel compositè  $CB . ZC$   
 $\supset CB . zC$ . ergò  $ZC \sqsubset zC$ .

VII. Quinetiam erit in hoc casu,  $ANq - ACq . CNq ::$   
 $AC . CK$ . Nam ducatur  $K$  Had  $CN$  parallela, protractæ  $AN$   
occurrent in  $H$ ; & connectatur  $CP$ ; & eodem planè modo quo su-  
perius (in iis quæ circa convexas partes attigimus) ostendetur fore  
 $AN \times NP . CNq :: AK . CK$ . unde divisim erit  $AN \times NP -$   
 $CNq . CNq :: AC . CK$ . est autem  $AN \times NP = ANq -$   
 $AN \times AP = ANq - : ACq - CNq = ANq - ACq +$   
 $CNq$ ; adeòque  $AN \times NP - CNq = ANq - ACq$ . ergò  
demum erit  $ANq - ACq . CNq :: AC . CK : Q . E . D$ .

Notetur; si fuerit  $AC$  minor semisse semidiametri circuli re-  
flectentis, quòd punctum  $A$  duos focos habebit ad easdem centri par-  
tes, quorum alter ad partes  $D$ , alter ad  $B$  pertinebit; sin  $AC$  major  
fuerit ista Semisse, focis qui ad diversos vertices  $B$ , &  $D$  pertinent,  
centrum  $C$  interjacebit.

VIII. Etiam hoc interseram *Theorema*, præmissis conforme: Si  
sit  $2 \underline{CK} . \underline{CN} :: \underline{CN} . \underline{F}$ ; itémque  $2 \underline{CA} . \underline{CN} :: \underline{CN} . \underline{E}$ ;  
&

& demittatur NQ ad AC perpendicularis, erit  $CQ = F - E$ . ||  
 Nam (ut supra) est  $CA.CK :: F.E$ . quare dividendo erit  $CA - CK.CK :: F - E.E$ . Item hic erit  $ANq - ACq = 2AC \times CQ + CNq$ . adeoque  $2AC \times CQ + CNq.CNq :: AC.CK$ . hoc est, (ob  $CNq = 2AC \times E$ .)  $2AC \times CQ + 2AC \times E.2AC \times E :: AC.CK$ . hoc est  $CQ + E.E :: AC.CK$ . quare dividendo  $CQ.E :: AC - CK.CK$ . ergo  $F - E = CQ.Q.E.D$ .

IX. Porro, si duorum quorumvis radiorum AN, AR reflexi NK, RL axem secant punctis K, L, erit  $CK.CL :: ARq - ACq.ANq - ACq$ . Nam ob  $CK.AC :: CNq.ANq - ACq$ . &  $AC.CL :: ARq - ACq.CNq$ . erit ex æquo perturbatè  $CK.CL :: ARq - ACq.ANq - ACq$ .

X. Hinc si radius AR sit ipso AN obliquior, erit  $CK > CL$ . Nam  $ARq - ACq > ANq - ACq$ .

XI. Hinc palam est reflexos NK, RL sese prius quàm axem decussare.

XII. Accipiantur porro bini pares arcus NR, RX, & incidentium AN, AR, AX reflexi cum axe conveniant punctis K, L, M; dico spatium LM, obliquiorum occurribus interjectum, majus esse spatio LK, quod rectiorum continetur occurribus. Nam è supra monstratis constat esse  $ANq + AXq > 2ARq$ . proindeque fore  $ANq + AXq - 2ACq > 2ARq - 2ACq$ . ac inde  $ANq - ACq.ARq - ACq > ARq - ACq.AXq - ACq$ . hoc est  $CL.CK > CM.CL$ . vel  $CM.CL < CL.CK$ . quare  $CM + CK < 2CL$ . & ideo  $LM < KL$ . Fig. 102.

XIII. Hinc rectius ingruens lux à reflectione versus axem condensatior evadit.

XIV. Quidni demùm rursus ex his inferatur, visibilis A imaginem circa reflexorum metam Z, oculo aspiciam in AZ constituto, apparere?

XV. Adversatur saltem (id quod experiendo deprehendetur) oculo aspiciam in ZB collocato confusiolem apparentiam obijci, quippe cum

cum eum tunc reflexi convergentes appellant; & imago distinctior Z post oculum consistat. quin ejusmodi complures apparentias observabitur ipsi si lubet, & ex his deducetis //

Fig. 103.

XVI. Præterea, dato oculi centro, velut O, quomodo designandum sit ipsum pervadens reflexus (ceu N $\infty$ ) è suprâ tractatis aliquatenus adparet. nec inibi generalius expositum *Problema* libet hic repetere.

XVII. Quinetiam antedicta recensendo constabit, si bisecentur subtensa PN in E; & subtensa N $\infty$  in F; ac fiat FZ.ZN::EA.NA; radiantis imaginem, visus O respectu, circa punctum Z consistere. planè similis est discursus, quorsum *κατασκευαζεν*. //

XVIII. Superest tantum, ut de posteriore quem innuebamus casu paucula subdamus. Eò, ponatur AC=AG=A $\gamma$ ; indè quilibet incidens cavo GB $\gamma$  radius ipsâ AC minor erit; sit talis alicujus AN reflexus N $\infty$ ; qui nempe retrò productus cum axe conveniet; puta ad K. Etiam hic præcedentibus conformia deprehenduntur, & suppari demonstrabuntur modo; qualia sunt nempe

$$\text{XIX. } AC.AN::CK.KN.$$

$$\text{XX. } ACq-ANq.CNq::AC.CK.$$

XXI. Radii AR ipso AN obliquioris reflexus cum axe concurrat in L; erit CK.CL::ACq-ARq.ACq-ANq. ac indè

$$\text{XXII. } CK\rightarrow CL.$$

XXIII. Incidentium rectorum (pares, ut superius, arcus in reflectente sumendo) reflexi concursus habent à se minoribus intervallis disjunctos. hæc, inquam, & alia quoad reliquos casus præmonstratis conformia, vel agnata persimili quoque quoad hunc casum methodo comprobantur. quare pluribus tempero; sed enim id quod ubique præcipuum etiam hic exercitiùs ostendam; præmissio tamen hoc, ad sequentia quoque concidenda non inutilli, *Lemma*io:

Fig. 104.

XXIV. Detur recta BC, in ea protracta designandum est punctum, velut Z; ita ut BZ ad CZ datam obtineat rationem, puta I ad R. // Id facile sic exequimur, //

I. Si

1. Si fuerit  $I \leftarrow R$ ; fiat  $I - R.R::BC.CZ$ ; quare componendo erit  $I.R::BZ.CZ$ . ergò factum.
2. Sin  $I \rightarrow R$ ; fiat  $R - I.I::BC.BZ$ . ergò rursus componendo  $R.I::CZ.BZ$ . vel inversè,  $I.R::BZ.CZ$ .

XXV. Fiat jam  $CA.AB::CZ.BZ$ ; Dico punctum  $Z$  esse metam, citra quam ( respectu centri  $C$  ) nullus reflexus axem decussabit; hoc est præmissis insistendo, fore  $CK \leftarrow CZ$ .

Nam ducatur  $NT$  circulum contingens ad  $N$ . erit ergo  $NK.NA::KT.AT \rightarrow BK.AB$ . quare  $NK.NA \leftarrow AB.BZ \rightarrow BK.AB + AB.BZ = BK.BZ$ . est verò  $NK.NA::CK.CA$ . &  $AB.BZ::CA.CZ$ . ergò  $CK.CA + CA.CZ \rightarrow BK.BZ$ . hoc est  $CK.CZ \rightarrow BK.BZ$ . vel permutando  $CK.BK \rightarrow CZ.BZ$ . unde dividendo  $CB.BK \rightarrow CB.BZ$ . adeoque  $BK \leftarrow BZ$ . unde liquet propositum.

XXVI. Exhinc (ut in casibus antè pertractatis) consecratur ejusmodi punctum  $Z$  esse locum ipsissimum imaginis punctum  $A$  exhibentis oculo, puta  $O$ , in axe  $CA$  constituto; patetque quàm longè passim ab Opticis; nominatim à novissimis *Stevino, Hobbio, Fabriog*, in eo assignando loco aberratur; quorum ex sententia versatur is ad punctum (puta  $Q$ ) tanto semotum à vertice  $B$  intervallo, quanto radians  $A$  ab ipso  $B$  distat. id quod præterquam quòd nullà verisimili ratione nititur (imò rationi prorsus adversatur; cùm nullus omnino radius oculum ingrediatur tanquam à puncto  $Q$  proveniens) experiencià facilimè refutatur. Nam si tanquam circa punctum  $A$  accensa candela speculo cavo  $GB$  exponatur, oculo velut ad  $O$  sito longè majori distans intervallo conspicietur, quàm ipso  $BQ$ , quod ipsam  $AB$  exæquat. quinimò tantillo versus centrum illum adducendo non æquali distantià, sed admodum majori videbitur elongari; tantà circiter ad sensum, probabilèmq; conjecturam; quantam proportio requirit à nobis præstituta. quo circa discursus noster experientiæ suffragio constabitur.

XXVII. Quod demum attinet ad locum imaginis respectu visus Fig. 106. extra radiationis axem positi; determinatur is eodem ac in casibus antecedaneis modo; bisecando scilicet ipsas  $NP$ ,  $N$  punctis  $E, F$ ; faciendoque  $EA.AN::FZ.ZN$ . Adnotandum saltem in rectioribus reflexis imaginem extra circulum consistere; sed in obliquioribus intra illum, nempe si fuerit  $AE \leftarrow AN$  punctum  $Z$  ultra axem

CB existet; sin  $AE \rightarrow AN$ , punctum Z versus  $\infty$  existet; sin  $AE = AN$ ; concursus infinitè distabit; seu proximus reflexus ipsi N  $\infty$  parallelus erit.

Not. ductâ AQ ad CB perpendiculari, si  $AE = AN$ ; erit  $AN = \sqrt{\frac{AQq}{3}}$ . Nam  $AQq = AP \times AN = 3AN \times AN = 3ANq$ ; itaque punctum N, istos casus determinans, facilè designatur.

Fig. 106.

Rationem ipsi tantillùm attendentes perspicietis; mihi sanè cunctas evolvendo minutias non animi satis, non otii suppetit.

XXVIII. Juvabit his unam, loco forsan opportuniore prætermisam, observatiunculam attexere. Si fuerit Z radiantis A Imago, vicissim erit A radiantis Z Imago. è dictis quoad speciales casus facilè cernitur hoc consecrari. quin & hinc generatim verum apparebit satis: Si fuerit Z ipsius A imago, tantum unus idcirco ab A manantium inflexus per Z transibit. (hoc imagini proprium esse sæpiùs in decursu inculcata satis arguunt, superque) quare reciprocè solus unus ab Z manantium inflexus per A transibit (nam si duo tales per A transire dicantur, etiam inde duo per Z transibunt, contra hypothefin) erit igitur A ipsius Z imago. Merebatur hæc (compendio bene serviens, & casus inter se varios conferentibus affundens lucem) observatio generalibus intertexti; nisi quòd non omnia se nobis statim produnt; & quædam in abstractione summa non ità facilè vel explicari possunt, vel comprobari.

A Catoptricis jam aliquando manum. quæ contentus ità quadante-nus promovisse, haud disparia (certè magis nova, minimèque proterita) circa refractiones sphericas, seu circulares, attentabo.

## LECT. XI.

I. **C**Atoptricâ circulari defunctus ad Dioptricam promovemur; quorum incidentium quocunque refractis unâ simulo perâ delineandis, adeoque refractionum symptomatis organicè pertentandis modum imprimis exponemus, præ cæteris, opinor expeditum. Seorsim ad  $v\gamma$  æqualem diametro (NG) circuli refringentis describatur circulus  $v\varpi\gamma$ . item habeat  $v\gamma$  ad  $S\gamma$  rationem illam, quæ refractiones determinat (illam autem deinceps, ut antehac, constanter nuncupabo rationem I ad R) & super diametro  $S\gamma$  describatur quoque circulus  $SH\gamma$ . Incidat jam radius quilibet MNP, cui conveniens designandus est refractus. ut hoc assequamur, circulo adposito à V adaptetur  $v\varpi = NP$ ; & centro  $\gamma$  per  $\varpi$  descriptus circulus fecet circumulum  $SH\gamma$  in H; connexâque  $\gamma H$  circumulum  $v\varpi\gamma$  interfecet in  $\xi$ . demùm connexâ  $v\xi$ , circulo NPG accommodetur  $NX = v\xi$ ; erit NX ipsius NP refractus. Etenim (ductis GP, GX) est  $\gamma H. \gamma\xi :: (\gamma S \gamma v ::) I. R.$  hoc est  $\gamma\varpi. \gamma\xi :: I. R.$  hoc est GP. GX :: I. R. cùm itaque sint ipsæ GP, GX recti sinus angulorum GN $\varpi$ , GNX (quorum GNP est angulus incidentiæ) liquet propositum.

Fig. 107:  
108.

II. Ad ipsa Symptomata progrediamur exponenda radiis ad circumulum refractis competentia; quorum illa pro more primò pertractabimus, quæ radianti puncto conveniunt ad infinitam quali distantiam posito, seu parallelos ad sensum radios ejaculanti. Quocirca per circuli refringentis Centrum C punctumque de longinquo radians protendatur recta ACZ, tum fiat BZ. CZ :: I. R; nec non dividatur CZ in F, ut sit FZ. FC :: I. R; & centro F per Z describatur circulus EGZ. his peractis, accipiat jam quilibet ad AC parallelus MNP (convexis incidens an concavis partibus perinde fuerit) dico si recta NC (ab incidentiæ nempe puncto per refringentis centrum ducta) circulo EGZ protracta occurrat in G; &

Fig. 109.

Fig. 109.

\* *Leſt.* 3, nu-  
mero. 10.

in axe capiatur  $CK = CG$ ; connectaturque recta  $NK$ , fore  $NK$  ipsius  $MNP$  refractum. Connectantur enim rectæ  $FG$ ,  $BG$ ; & quoniam est  $BZ.CZ :: (I.R.:) FZ.FC$ ; erit permutando  $BZ.FZ :: CZ.FC$ . dividendoque  $BF.FZ :: FZ.FC$ . itaque patet triangula  $BFG$ ,  $GFC$  (latera scilicet habentia circa communem angulum  $GFC$  proportionalia) similia fore. quamobrem erit  $BG.GF :: GC.CF$ . seu permutatim  $BG.GC :: GF.CF$ . hoc est  $BG.GC :: FZ.CF :: I.R.$  verum in triangulis  $BCG$ ,  $NCK$  est  $BC = CN$ , &  $CG = CK$ ; & ang.  $BCG = NCK$ ; adeoque  $BG.GC :: NK.CK$ . quare erit quoque  $NK.CK :: I.R.$  ergo, \*secundum generatim antehac ostensa, liquet  $NK$  ipsius  $MN$  refractum existere.

*Coroll.* Adnotetur esse triangula  $BFG$ ,  $GFC$  similia; ac esse  $BG.CC :: I.R.$ ; & ang.  $BGE = GCF$ ; & esse  $BF, FG, FC \div \&c.$

III. Ex hoc (sanè pulchro, perutilique *Theoremate*) cum particularis exoritur methodus hujusmodi quotcunque refractos expeditissime seu delineandi, seu computandi; tum ipsorum præcipua *symptomata* facillimè discernuntur, ac demonstrantur. qualia sunt, quæ in subiectis exhibentur *Corollaris*.

Fig. 110.

IV. Patet hinc punctum  $Z$  esse limitem ultra quem (respectu centri) nullus axem interfecat refractus; seu perpendicularis ipsius  $AB$  (vel ei saltem quàm proximè adjacentis radii) refractum ad  $Z$  terminari. quia nimirum est  $CZ \sqsubset CG$ , vel  $CR$ .

Fig. 111.

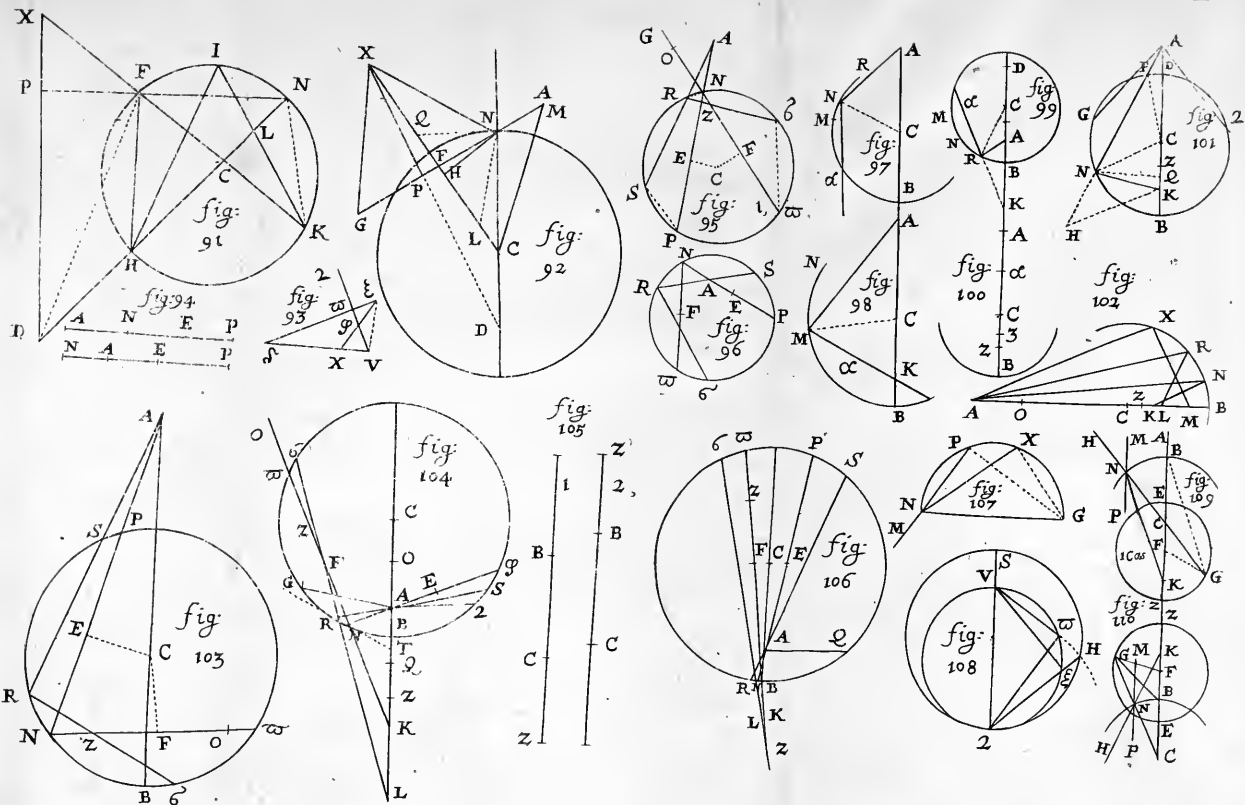
V. Consequitur etiam, si duorum incidentium  $MN$ ,  $QR$  (quorum  $QR$  sit obliquior) refracti conveniant cum axe punctis  $K$ ,  $L$ , fore  $CK \sqsubset CL$ . Etenim si rectæ  $NC$ ,  $RC$  ad circulum refractarium (itâ circulum  $EGZ$  meritò subinde nominabimus) producantur, ut ipsum secent punctis  $G$ ,  $H$ ; liquet esse  $CG \sqsubset CH$ ; adeoque  $CK \sqsubset CL$ . Hinc.

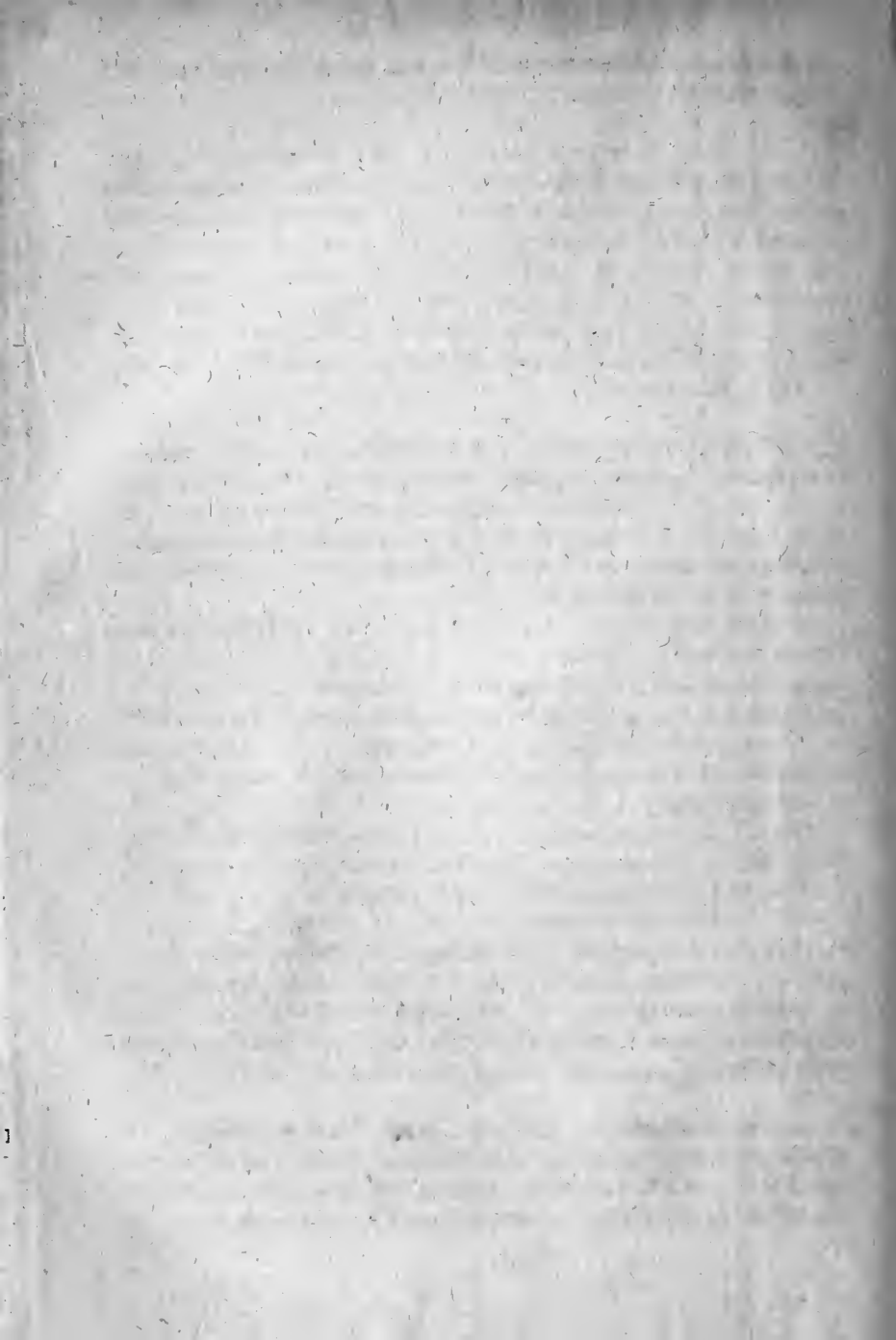
Fig. 111.

VI. Ad easdem partes incidentium refracti sese prius interfecant quàm axem; (veluti puta refracti  $NK$ ,  $RL$  sese decussant in  $X$ .)

VII. Quinetiam, si in primo casu per centrum  $C$  ducatur recta  $VI$  ad  $BZ$  perpendicularis, distoque circulo refractario occurrens ad  $I$ ; & fiat  $CY = CI$ , patet punctum  $Y$  esse limitem refractionis  
cite-







citeriorem. erit enim connexa VY refractus obliquissimi radii, ceu TV, circulum refringentem contingentis.

VIII. Item, in secundo casu si recta CVI circulum EGZ tangat in I, & adsumatur  $CY = CI$ , erit punctum Y citimus alter refractorum limes. Etenim connexa VY refractus erit incidentis (puta VT) ad BC paralleli; qui certè cunctorum obliquissimus erit hujusmodi refractionem patientium. quum enim (\*è præmissis) *\*Lect. 3. num. 7.* connexa FI, sit  $FI.CF::I.R.$  hoc est sinus rectus anguli FCI (vel anguli CVT) ad sinum totum, ut I ad R; nullus ipso TV obliquior medium BNV penetrabit; at ipse quicumque talis reperciatur; velut  $\phi \downarrow$  in  $\phi \zeta$ .

Fig. 112.

IX. Cæterum hic (tametsi præter ordinem non nihil, extrâque suum locum) egregiam quandam & præsertim notabilem istius, quem nuncupavimus, refractarii circuli proprietatem interferemus: Omnium à puncto B promanantium, & à circuli EGZ cavis partibus refractionem patientium (juxta casus prænominatos respectivam) refracti per punctum C transibunt.

Nam ejusmodi quilibet incidat radius BG, & (stantibus quæ præstructa præmonstratæque sunt) triangula BGF, GCF similia sunt; Fig. 113. angulûque BGF par angulo GCF; itémque  $FG.CF::I.R.$  114. est autem FG ad CF, ut Sinus anguli GCF hoc est anguli BGF ad Sinum anguli CGF. ergò Sinus anguli BGF (qui est angulus incidentiæ) ad Sinum anguli CGF se habet, ut I ad R. ergò CGC est refractus ipsius BG: Q. E. D.

Nota. Si qui ad convexas hujusce circuli partes incidunt, ità reflectantur, ut perpetuo Sinus anguli incidentiæ ad Sinum anguli reflexi se habeat ut I ad R; etiam reflexi per C transibunt.

Hinc habetur unum (quoad hos casus) è præcipuis in Dioptrica desideratum, perquam utile; Superficies simplicissima radios ab uno puncto procedentes ità refringens, ut tanquam ab altero proveniant; id quod demonstrationis adductus commoditate Corollarii loco (licet ad aliam pertinens hypothefin) hic apponere non dubitavi, redeamus è diverticulo.

X. Notandum porrò, quòd diversos refringentes circulos, iisque competentes, modo præstituto determinatos, refractarios adsumendo, rectæ CB, EZ, CE, CZ, CF easdem in uno, quas in altero quovis proportionibus observant; id quod faciliè demonstratur; & satis elucescit

cescit ex eo, quod earum omnium ad se proportionem in eodem ubique modo fundantur in una ratione I ad R. verbis, & Schematis effingendis parco. Pro sequentibus hæc adjungo *Lemma*.

XI. 1. Sint tria quanta A, B, C (quorum maximum A) se deinceps æqualiter excedentia; sint etiam altera totidem M, N, O; & sit  $A : B :: M : N$ ; ac  $B : C :: N : O$ ; dico fore quoque tria M, N, O in ratione continua *Aritmetica*. Nam ob  $A : B :: M : N$ . erit divisim  $A - B :: M - N$ . item ob  $B : C :: N : O$ . erit per rationis conversionem  $B - C :: N - O$ . ergo erit ex æquo  $A - B : B - C :: M - N : N - O$ . itaque cum sit ex Hypothesi  $A - B = B - C$ ; erit etiam  $M - N = N - O$ : Q. E. D.

XII. 2. In circuli quadrante Z Q trium arcuum ZG, ZH, ZI Sinus recti F $\alpha$ , F $\epsilon$ , F $\gamma$  æqualiter crescant (ut nempe sit  $\alpha\epsilon = \epsilon\gamma$ ) dico fore  $G\alpha - H\epsilon = H\epsilon - I\gamma$ .

Nam ducatur subtenfa GI ipsam H $\epsilon$  secans, in X; & sint XR, IS ad FQ parallela; patet ipsas GR, XS æquari hoc est fore  $G\alpha - X\epsilon = X\epsilon - I\gamma$ ; unde liquidum est esse  $G\alpha - H\epsilon = H\epsilon - I\gamma$ : Q. E. D.

XIII. 3. Sinto concentrici bini circulorum quadrantes FZX, F $\zeta\xi$ ; & ad FZ parallela ducatur recta quævis LG $\gamma$ ; circulos intersecans punctis G,  $\gamma$ ; dico fore  $FZ - LG = F\zeta - L\gamma$ .

Nam connexa FG circum  $\gamma\xi$  producta secet in T; connectanturque subtenfae ZG,  $\zeta T$  (hæc ipsam L $\gamma$  secans in S) Patetque jam rectas ZG,  $\zeta T$  parallelas esse; adeoque quadrangulum ZGS $\zeta$  fore parallelogrammum; unde  $GS = Z\zeta$ ; adeoque  $F\zeta - LS = FZ - LG$ . ergo  $F\zeta - L\gamma = FZ - LG$ : Q. E. D.

XIV. Sint jam tres radii paralleli MN, QR, VX, à se distantes æqualiter (hoc est ut ductis Nv, R $\rho$ , X $\xi$  ad axem AC perpendicularibus sit  $X\xi - R\rho = R\rho - Nv$ ) & ipsorum refracti cum axe convenient punctis K, L, O; erit obliquorum concursibus interjectum spatium OL majus spatio LK, quod à rectorum occursibus continetur.

Nam ducantur NC, RC, XC circulo refractario occurrentes punctis G, H, I; & ad has à refractarii centro F ducantur perpendiculares F $\alpha$ , F $\epsilon$ , F $\gamma$ ; & quoniam triangula CX $\xi$ , CF $\gamma$  similia sunt; erit  $X\xi : CX :: F\gamma : CF$ . item simili de causa, est CR (CX).

$R_{\rho} :: CF.F\epsilon$ ; quapropter erit ex æquo  $X\xi.R_{\rho} :: F\gamma.F\epsilon$ . non dispare ratione constabit esse  $R_{\rho}$ .  $Nv :: F\epsilon.Fa$ . ergo cum tres  $X\xi, R_{\rho}, Nv$  se æqualiter excedant; \*etiam tres  $F\gamma, F\epsilon, Fa$  se æqualiter excedent; unde consequetur esse  $Ca - C\epsilon \Rightarrow C\epsilon - C\gamma$ ; nec non esse \* $aG - \epsilon H \Rightarrow \epsilon H - \gamma I$ ; adeoque conjunctim  $CG - CH \Rightarrow CH - CI$ ; hoc est  $CK - CL \Rightarrow CL - CO$ ; hoc est denuò  $LK \Rightarrow OL$ : Q.E.D.

\*21 hujus Lect.  
Hyp.

\*22 huius Lect

XV. Hinc apparet rectius illapsam refringenti lucem magis inspissari; versúsque punctum Z in arctius redigi; maximam proinde vim ejus isthic exeri; focumque combustionis (ad solem) ibi versari.

XVI. Consecratur etiam radios (hujusmodi saltem parallelos) quò rectiores oculo (cujus nempe superficies refractionis munus obeuntes aut Sphæricæ sunt, aut Sphæricas aliquatenus referunt) incidunt, eò facilius ab ipso readunari, seu propius recolligi.

XVII. Quinimò tandem ex his colligitur visibilis longinqui puncti speciem oculo, in axe posito, circa punctum Z apparere. Etenim ab ei adjacentibus partibus refracti cum præ cæteris perpendiculares (vi proinde fortiores, & recollectu paratiores) neque non copiosiores affluunt; quibus ex causis imaginis positio dependet; ut jam sæpius admonitum: — ἐχθρόν δὲ μοι ὄσιν Αὐτὸς ἀειζήλως εἰρημένα μυθεσθῆεν. cæterum hæc defunctus curâ tantisper respirabo. ||

## LECT. XII.

I. **P**arallelorum ad circulum refractionem patientium in contemplatione defixis, præter alia præcipua symptomata, locum ultimè determinavi, quam isti representant, imaginis, oculo in axe constituto. res jam postulat ut eandem definiamus oculi gratiâ secus collocati. veruntamen unam prius haud inutilem adnectam observationem, ad præcedentia spectantem; hanc utique:

Fig. 118,  
119.

II. Si duo Segmenta  $NBR$ , v<sup>c</sup> latitudines (vel subtensas)  $NR$ ,  $V\delta$  æquales habeant; quorum  $V\delta$  ad majorem pertineat circulum; hoc cum potentiùs aduret, tum objectum visibile clariùs atque distinctiùs exhibebit. Sint enim  $C$ ,  $\kappa$  circulorum refringentium centra; & circuli iis competentes refractarii sint  $EGZ$ ,  $\epsilon\gamma\zeta$ ; horumque centra  $F$ ;  $\phi$ ; tum parallelorum punctis  $N$ , v incidentium sint refracti  $ND$ ,  $V\delta$ ; dico tum fore  $DZ \sqsubset \delta\zeta$ . || Ducantur enim rectæ  $NCG$ ,  $V\kappa\gamma$ ; hisque perpendiculares rectæ  $FL$ ,  $\phi\lambda$ . éstque  $CN.v\varpi :: CN.NP :: CF.FL$ . &  $v\varpi.\kappa v :: \phi\lambda.\kappa\phi$ . ergò (rationes sibi pares adjungendo) est  $CN.v\varpi \vdash v\varpi.\kappa v :: CF.FL \vdash \phi\lambda.\kappa\phi$ . hoc est  $CN.\kappa v :: CF \times \phi\lambda.FL \times \kappa\phi$ . est autem  $CN.\kappa v :: CF.\kappa\phi :: CF \times \phi\lambda.\kappa\phi \times \phi\lambda$ . quapropter erit  $CF \times \phi\lambda.FL \times \kappa\phi :: CF \times \phi\lambda.\kappa\phi \times \phi\lambda$ ; & idcirco  $FL \times \kappa\phi = \kappa\phi \times \phi\lambda$ ; indeque  $FL = \phi\lambda$ . hinc consequetur fore  $CF - CL \sqsubset \kappa\phi - \kappa\lambda$ ; nec non  $FZ - LG \sqsubset \phi\zeta - \lambda\gamma$ ; proindeque conjunctim  $CZ - CG \sqsubset \kappa\zeta - \kappa\gamma$ ; hoc est  $CZ - CD \sqsubset \kappa\zeta - \kappa\delta$ ; hoc est demum  $DZ \sqsubset \delta\zeta$ ; exhinc lux ab arcu  $v\epsilon$  magis constipata, (in spatium quippe restrictius  $\delta\zeta$  coacta) violentiùs operabitur; & à fonte magis ad punctum accedente promanare visa punctum radians distinctiùs exhibebit; id quod institutum fuit ostendere; quo rei passim observatæ, nec exilis in perspicilliorum constructione usûs ratio constaret. || In ordinem jam recidimus; ut puncti nempe longinqui locum apparentem indagemus, oculi respectu quomodocunque sitique in finem conficiendum venit imprimis hujusmodi *Problema*, rectum definiens in qua locus iste versatur:

III. Dato

III. Dato circulo refringente; punctoque quovis X; per punctum X ducatur recta, quæ sit incidentis ad datam positione rectam CB parallelè refractus.

Si punctum datum X ponatur in axe CB; facillimè perficitur negotium; etenim si fiat  $R.I::CX.T$ ; & centro X intervallo ipsam T adæquante describatur circulus refringentem intersecans in N; è præmissis admodum patet connexum NK per N incidentis ad BC paralleli refractum esse; quia scilicet est  $CX.XN::CX.T::R.I$ . Fig. 120.

IV. Verùm extra casum hunc, & alios particulares nil huc attinentes, generatim conceptum *Problema Solidum* est, aut plusquam Solidum (ut ex analysi non difficilè perspiciatur) & certè viâ confuerâ, per lineas vulgò receptas, constructu perquam arduum & operosum; ita quidem ut licèt mihi non penitus incomperta sit methodus ejusmodi constructionem non unam moliendi, ægrè possim adduci, tantum ut ei temporis, tantum laboris impendam, quantum exposcit; suffecerit itaque modum indigitare, quo per lineam quandam sibi peculiarem, punctatim facili negotio designabilem, ita construi possit, ut una suam naturam ac indolem prodat. modus ille sic habet.

V. Connestatur recta CX; fiatque  $CX.CV::R.I$ ; & per punctum V indefinitè protendatur recta FG, datæ CB parallela; tum è refringentis centro C rectæ quocunque C I exeant, rectam FG decussantes punctis H; & centro X, intervallo rectas VH perpetuum æquantè descripti circuli rectis C I occurrant punctis N; per hujusmodi puncta quævis linea transit, quam innuimus expositi *Problematis* Solutioni deservituram; ejus scilicet, & dati circuli refringentis intersectio quæpiam incidentiæ punctum erit, ad quod per X ducta recta refringetur in aliquam ipsi BC parallelam; seu vicissim hæc in illam. Sit enim talis intersectio quævis N; & ducta NX ipsam BC fecerit in K; & sint NM, ac XT ad BC parallelæ. Estque tum  $CK.KN::(TX.XN::TX.VH::CX.CV::) R.I$ ; unde secundum ostensa liquet NXK refractum esse ipsius MN; quod oportebat factum. Ità *Problema Summeisoy* utcunque licebit exequi, nec non ejusce qualitatem intueri; quot refracti per oculi centrum meent definire, singulósque reipsâ designare; quæ longiusculum esset sigillatim exponere. cum autem eâtenus imaginis locus Fig. 121.

habeatur determinatus; succedit ut breviter etiam ipsissimum in singulo tali refracto punctum ostendamus, ad quod illa consistit. in cuius rei gratiam hoc quasi *Lemma* præsternemus.

Fig. 132.

VI. In circulo  $ANB$ , cujus centrum  $C$ , sint Semidiametro  $CA$  perpendiculares  $NE$ ,  $RF$ ; item Semidiametro  $CB$  sint perpendiculares  $NG$ ,  $XH$ ; sint autem  $CE$ ,  $EF$  ipsis  $CG$ ,  $GH$  proportionales; & arcus  $NR$ ,  $NX$  indefinitè parvi, seu quasi minimi dictâ conditione præditi; dicimus arcum  $NR$  ad arcum  $NX$  rationem habere conflaram è rationibus ipsarum  $CE$  ad  $CG$ , &  $NG$  ad  $NE$ ; vel esse  $\text{arc. } NR, NX :: CE \times NG. CG \times NE$ . Nam per  $N$  ducatur  $VT$  tangens circulum, ipsisque  $FR$ ,  $HX$  occurrens punctis  $T$ ,  $V$ . est itaque (propter Summam ex Hypothesi parvitatem dictorum arcuum)  $\text{arc. } NR.CN :: NT.CN :: EF.EN$ . item  $CN. \text{arc. } NX :: CN.NV :: NG.GH$ . quapropter erit  $\text{arc. } NR.CN + CN. \text{arc. } NX = (EF.EN + NG.GH = EF.GH + NG.EN =) CE.CG + NG.EN$ . hoc est  $\text{arc. } NR$ .  $\text{arc. } NX = CE.CG + NG.EN$ . hoc est  $Q.E.D.$  (vel  $\text{arc. } NR.NX = CE \times NG. CG \times EN$ .)

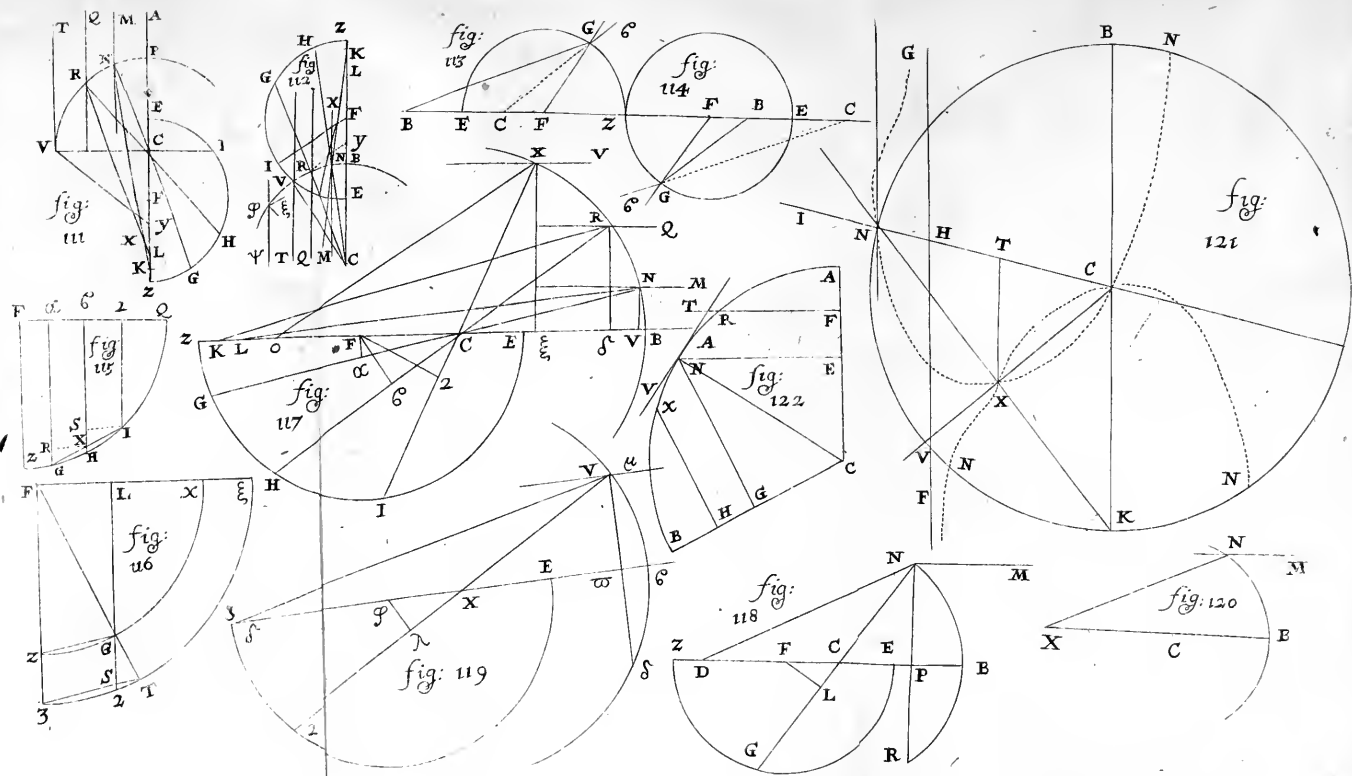
Fig. 123,  
124.

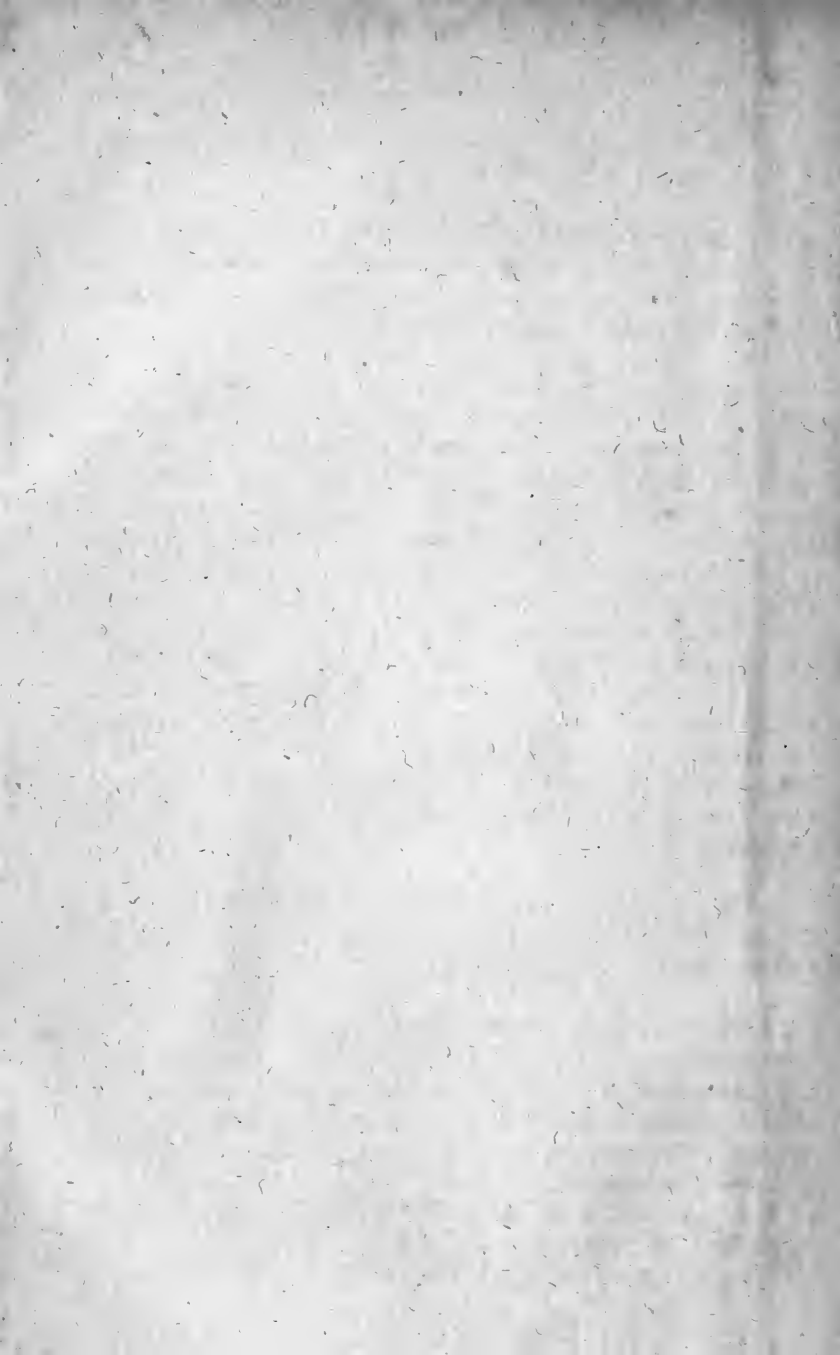
VII. Sit jam radii cujuscvis talis  $MNP$ , refringentem interfecantis punctis  $N$ ,  $P$ , refractus  $N\sigma$  (refringentem nempe denuò secans in  $\sigma$ ) huic autem indefinitè vicinus (& quasi proximus) adiaceat radius  $QRS$ , cujus itidem refractus  $R\sigma$  (refringenti nempe rursus occurrens in  $\sigma$ ), priorem  $N\sigma$  decussans in  $Z$ ; bisecentur autem subtensæ  $NP$ ,  $N\sigma$  punctis  $G$ ,  $E$ : Dico rationem  $NZ$  ad  $GZ$  componi è rationibus  $NG$  ad  $NE$ , &  $CE$  ad  $CG$ .

Nam ducantur rectæ  $CE$  (hæc ipsam  $RS$  quoque secans in  $F$ ) &  $CG$ ; nec non  $CI$  ad  $R\sigma$  perpendicularis; & in protracta  $CG$  sumatur  $CH = CI$ ; & per  $H$  ducatur  $XY$  ad  $N\sigma$  parallela, seu perpendicularis ad  $CH$ ; unde est  $XY = R\sigma$ ; &  $\text{arc. } NX = Y\sigma$ ; &  $\text{arc. } XY = \text{arc. } R\sigma$ ; adeoque  $\text{arc. } NR \pm \sigma\sigma = 2 \text{ arc. } NX$ . Estque præterea  $CG.CE :: R.I :: CI.CF :: CH.CF$ ; adeoque permutatim  $CG.CH :: CE.CF$ . ergò (juxta præcedentem) est  $\text{arc. } NR.NX = NG.NE + CE.CG$ . ad hæc ob illam (quæ ponitur) arcuum  $NR$ ,  $SP$ ,  $\sigma\sigma$  exiquitatem, erit  $\text{arc. } NR.\sigma\sigma :: \text{subtensa } NR.\sigma\sigma :: NZ.Z\sigma :: NZ.Z\sigma$ . ergò (inversè componendo, vel dividendo, tum & consequentes subduplando)  $\text{arc. } NR \pm \sigma\sigma :: NZ. \frac{NZ \pm Z\sigma}{2}$ . atqui velut modò dictum)

arc







arc  $\frac{NR^{\pm} : \sigma \sigma}{2} = NX$ ; item est  $\frac{NZ^{\pm} : Z \sigma}{2} = GZ$ . erit ergò arc Fig. 124.

$NR.NX :: NZ.GZ$ . quapropter erit (juxta præcedentem)  
 $NZ.GZ = NG.NE + CE.CG$ .

VIII. Porrò liquet punctum  $Z$  esse locum imaginis, quem expetimus, oculo conspicuæ in recta  $N\sigma$  constituto; utpote circa quod viciniorum ipsi  $NP$  radiorum refracti ipsam  $N\sigma$  intersecant; qua de re multoties egimus, ut pigeat eò plura *επιλογέιν*.

IX. Facile verò, Secundum *Theorema præmissum*, designatur punctum  $Z$ . Ducatur nempe  $CG$  ad refractum  $NK$  perpendicularis; & ad connexam  $CN$  ducatur perpendicularis  $GV$ ; & per  $V$  ducatur  $VZ$  ad  $CK$  parallela, secans ipsam  $NK$  in  $Z$ . factum erit. Nam, connexâ  $GE$ , liquet angulos  $GEC$ ,  $GNC$  (circumducti Fig. 125. nempe per  $N, E, G, C$  circuli subtensæ  $GE$  insistentes ambos) æquare; hoc est angulos  $GEC$ ,  $VGC$  æquare. quapropter (utrique rectum adjiciendo) toti  $NEG$ ,  $ZGV$  æquantur. item alterni  $GNE$ ,  $VZG$  æquantur. ergò triangula  $GNE$ ,  $VZG$  similia sunt, unde  $NG.NE :: ZV.ZG$ . itaque  $CE.CG + NG.NE = CE.CG + ZV.ZG$ . verum (ob refractionem) est  $NK.KC :: I.R :: CE.CG$ ; hoc est  $NZ.ZV :: CE.CG$ . est igitur  $CE.CG + NG.NE = NZ.ZV + ZV.ZG$ ; hoc est  $CE.CG + NG.NE = NZ.ZG$ . ergò punctum  $Z$  conditionem obtinet, imaginis loco congruentem, e mox ostensis. adeò liquet propositum.

X. Quin subnotamus rectam  $NK$  ad punctum  $Z$  ità dividi, ut sit  $NZ.ZK :: NGq.CGq$ . Etenim est  $NZ.ZK :: NV.VC :: NVq.VGq :: NGq.CGq$ .

XI. Subjiciam & hoc è dictis confectarium *Theorema*:

Fiat  $\sqrt{3Rq}.\sqrt{Iq} - Rq :: CB.CQ$ ; ductâque  $QN$  ad  $CB$  perpendicularis circumferentiæ occurrat ad  $N$ ; radii verò  $MN$  ad  $CB$  paralleli refractus sit  $NK$ , circuli peripheriæ denuò occurrens in  $Z$ ; dico punctum  $Z$  esse imaginem, qualem mox definivimus, oculo conspicuam in ipsa  $NK$  sito. Fig. 126.

Nam (ductis  $CE$  ad  $MN$ , &  $CG$  ad  $NZ$  perpendicularibus, ac junctâ  $CN$ ) ob  $3Rq.Iq - Rq :: CNq.NEq$ . hoc est  $3CGq.CEq - CGq :: CNq.NEq$ ; erit dividendo  $4CGq$

—CEq.CEq—CGq::CNq—NEq.NEq::CEq.NEq.  
 quare permutando 4 CGq—CEq.CEq::CEq—CGq.  
 NEq. (hoc est) :: NGq—NEq.NEq. ergo componendo  
 4 CGq.CEq::NGq.NEq. & ideò 2 CG.CE::NG.  
 NE. quare 2. 1 + CG.CE = NG.NE. vel 2. 1 = NG.  
 NE + CE.CG. hoc est NZ. GZ = NG.NE + CE.CG.  
 unde liquet, è mox antedictis, propositum.

XII. Ex ista porro constructione facillè colligitur, si fuerit 3 Rq  
 = Iq — Rq (hoc est si 2 R = I) adeoque CQ = CB; quòd hu-  
 jusmodi punctum Z non aliud erit ab ipso D; seu perpendiculari ipsi  
 AB debitam imaginem ad punctum D consistere; eas verò quæ reli-  
 quis refractis conveniunt ejusmodi imagines intra circulum omnes, vel  
 supra peripheriam extare. quinetiam si fuerit 2 R = I, adeoque  
 CB = CQ, patet nullius refracti imaginem in peripheria existere,  
 sed omnes supra ipsam. Enim verò in his casibus omnes refracti ax-  
 em AD supra punctum D interfecant. verum si fuerit 2 R < I (uti-  
 que sicut reverà quoad plerasque cunctas in hac rerum natura pelluci-  
 das refringentes materias usu venit) uti reipsa datur ejusmodi punctum  
 Z, in peripheria TD alicubi situm, ita facillè poterit isto modo de-  
 terminari.

XIII. Observetur porro sic definitum punctum Z circuli partem à  
 D versus T per radios quadranti BT incidentes illustratam terminare.  
 Omnes enim ipso MN obliquius incidentium refracti ipsam NZ supra  
 Z versus G decussabunt; adeoque ad partes ZD circulo impingent;  
 item omnium ipso MN rectiorum refracti ipsam NZ infra Z versus K  
 interfecabunt; & hinc etiam in arcum ZD cadent.

Fig. 127.

XIV. Exhinc apparet (id quod *ab eximio D. Slufo* monitum ami-  
 cus mihi communicavit) potuisse *Cartesium* sine tabularum confecti-  
 one suam *Iridis* angulum determinare. nam assumpto arcu DY = DZ;  
 angulum istum arcus ZY metitur; posito circulum propositum per  
 aquei globi centrum transire. quod ita facillè constat. Radii cujusvis  
 diametro BC paralleli MN refractus NZK reflectatur in ZFH;  
 & ZF in FO refringatur; sitque FL ad BD parallela; sumatur eti-  
 am DY = DZ; & connectantur CZ, CY; dico angulum LFO  
 æquari angulo ZCY. Nam imprimis ob ZN, ZF æqualiter ad pe-  
 ripheriam inclinatos, patet angulum OFH angulo PNZ vel CKZ  
 æquari: igitur ang. HFL — HFO = ang FIC — CKZ = ang  
 KIZ.

KIZ — CKZ = ang NZI — 2 ang CKZ = 2 ang NZC —  
 2 ang CKZ = 2 ang. ZCD = ZCY. est igitur ang. OFL =  
 ang ZCY. Cum itaque sit in superiore Hypothesi punctum Z um-  
 bræ lucisque confinium, manifestè liquet propositum.

XV. Subnotetur autem, si medium inflectens sit aqueum, arcum  
 ZY esse partem circuli totam (posticam scilicet) illuminatam; tan-  
 gentis enim ST refractus, puta TV, nedum non punctum Y præ-  
 tergreditur, at citra punctum D cadit. ast in densioribus mediis, ve-  
 lut in vitro, secus accidere potest; siquidem in eo tangentis refractus, Fig. 128.  
 puta TX, ultra terminum Y (modo prædicto designatum) cadit,  
 ut quidem ex calculo facilè colligatur; unde pars illuminata arcu ZY  
 amplior evadit, tangentium quippe refractis circumscripta. Vide-  
 rit igitur excellentissimus vir, an universum constet (id quod ipse  
 nisi fallor innuere videbatur) ex observata partis illuminatæ quantitate,  
*Iridis angulum, etiam juxta Cartesianas Hypotheses, rectè determi-*  
*nari.* Nam sumendo arcum DR = DX; ad punctum quidem R  
 pertingeret illustratio; neque tamen ulla lux quadrantæ BT incidens à  
 parte ZR (sed illa tantum quæ ad partes ZD cadit) ad oculum O  
 inflectetur. unde quoad oculos ad has partes sitos, hoc est quoad rem  
 quæ præ manibus, punctum Z lucem & umbram dirimit atque distin-  
 gnat.

XVI. Vobis autem expendendum propono, annon exhinc appa- Fig. 128.  
*rentiarum in Iride ratio elici possit, illà fortè verisimilior, quam*  
*ipse Cartesius assignavit.* quid enim si dixerò peripheriæ ZV impin-  
 gentem lucem, & versus O inflexam magis apparere; primò, quia spis-  
 sior est, ac à radiorum geminâ diffusione constat, ab utraque puncti N  
 parte in arcum ZV refractorum; tum secundo, quoniam obliquius  
 ipsi ZV incidit, adeoque facilius & copiosius indè quam aliunde  
 versus partes O retorquetur? Et cum præsertim circa punctum Z  
 acutiùs radii coeant, neque non incurrant obliquius, quidni propterea  
 vividior exindè resultet apparentia? Verum hæc *παρεμβολή*.

*Quoniam Colorum incidit mentio,* quid si de illis (et si præter morem  
 ac ordinem) pauca divinavero?

XVII. *Album* est quod lucem copiosam, pariter ubique spissam,  
 circumfundit. Talia fermè sunt corpora, rarioribus poris inter-  
 puncta; præsertim, quæ multas superficièculas, in omne latus obver-  
 sas, habent. Suadetur hoc, Quia purè lucida semper alba videntur;  
 Quia

Quia corpus bene tersum luci Splendidæ expositum albescit; Quoniam alba difficilius ignem concipiunt; Quod humore tenuiore vacuata corpora (*Capilli, Folia, Cineres*) canitiem acquirunt; Quibus & frigore constricta accenseri possent.

*Nigrum* est, quod lucem minimè, vel parciſſimè refundit. talia plerunque sunt corpora valdè pellucida; nec non quæ crebros meatus, & cavernulas lucem absorbentes habent. Hoc indicat, Quod omnes *Umbra nigra apparent*; Quod *Aqua, Vitrum, Nubes* ad hunc colorem vergunt; Quod *nigra* faciliùs ignem imbibunt, caleſciunt, comburuntur; Quod longius diſſita (quorum ſenſim intercipitur, & amittitur lux) obſcuriora videntur.

*Rubrum* est, quod lucem effundit hinc indè confertam, ac ſolito magis conſtipatam, aſt interſitiis umbroſis diremptam, & interruptam. talia concipi poſſunt corpora, multas intra ſe quaſi *fornaculas & focos* habentia (qualia X, è *ſpeculis cavis* contextum; & Y è *Sphæruſis*, tranſmiſſam lucem ad totidem *focos* cogenitibus, conſtans). Argumento ſit, Quod à *Speculis*; & *vitris uſtoriiſ* collecta lux rubescit; Quod corpora denſa ignita (quippe quorum cellæ luce ſpiſſâ referciuntur) rubra videntur; Quod roſcida nubes Soli (matutino, vel vespertino) expoſita rubet; Quod eroſio rubiginem parit. || Ad rubri naturam fortasſe pertinet, quod compreſſa lux languidiùs emicat.

*Cæruleum* est quod lucem raram, aut impetu ſegniore concitatam emittit. talia videntur eſſe corpora, quæ particulis conſtant albis ac atris alternatim diſpoſitis; ſed & hunc ſubinde colorem oſtentant candida maligniùs illuſtrata. Exemplo ſint, *Æther Sudus* (in quo nempe pauciora natant corpuscula lucem ad oculos reverberantia, cæterâ luce dilabente) *Mare*, ſale candido nimirum & humore pellucido conſtans; *Umbra corporis* cujuſvis opaci, de die, ad lucernam ardentem facta, & ad chartam albam excepta ſeu terminata; (nempe corporis AB ad chartam XY violacea depingitur umbra, à lucerna C).

*Viride* cæruleo perquam agnatum eſt. *Discrimen* explorent ſagaciores; ego non auſim ariolari.

Caterum reliqua colorata ex iſtis variè commixtis, atque contemperatis emergunt; ut *flavum* ex albo copioſo, rubrique nonnihillo interſperſo; *purpureum* ex multo cæruleo, rubrique tantillo, &c. Verum ſufficiat hâc tenus, iſta ſupra captum noſtrum poſita ſcrutantes; nos illis, qui *æſtologiâs Phyſicas* moroſiùs excipiunt, deridendos propinaſſe.

Sufficient hæc pro radiis parallelis; ad divergentes ordine procedendum eſt; aſt interpoſitâ morâ, nè vix exorſi cogamur abrupte. ||

Lect.

Lat.  
Fig. 128.

Lat.  
Fig. 128.

## LECT. XIII.

I. **T**ransactis iis quæ refractioni conveniunt isti, quàm ad circuli peripheriam subeunt radii sibi met paralleli; quid iis obvenit proximè dispiciendum venit, qui a puncto quopiam sensibiliter divergentes iidem circulo se obijciunt refringendos. cum autem in hac Hypothesi multa reperiatur casuum varietus è pluribus causis oriunda (nedum enim à mediorum specie differentium ordine, vel situ versus se diverso; quin etiam circuli refringentis alia ac alia, convexa nempe vel concava, facie radiationi obversa; sed ab ipsius quoque radiantis magis aut minus à refringente semoti positione conclusionum emergit nonnulla discrepantia) nobis incumbet ita rem, quâ possumus, moderari, simul ut cum ex abstractione nimia proveniens confusio, tum è repetitione fastidium aliquotusque devitentur. id autem non aliàs, opinor, commodiùs assequemur quàm imprimis generalia quædam attingendo, cuidam uni casui (illi nempe, ubi  $I \perp R$ , & radii convexis circuli partibus incident). Sic applicata, ut satè facile possint ad alios quoque transferri, tum peculiaria nonnulla singulis congruentia subnotando. ad rem.

II. In circulum refringentem BN (cujus centrum C) radiet punctum A; & connexa AC protendatur ad utrasque partes indefinitè; tum cujusvis incidentis AN sit refractus NK, cum axe nimirum in K conveniens; dico compositas rationes AC ad CK, & NK ad NA æquari rationi I ad R. Coniungatur enim CN, & ducatur KH ad CN parallela; erit igitur (ut generatim antehac habetur ostensum)  $I.R::NK.NH= NK.NA - NA.NH = NK.NA + AC.CK: Q.E.D.$  Fig. 129.

3 Lect. num. 9.

III. Hinc si fuerit CA.CR :: I.R. erit CK.CR::NK.NA.

Nam.

Nam erit tum  $CA \cdot CR = CA \cdot CK + NK \cdot NA$  unde, communem utrinque adjiciendo rationem  $CK$  ad  $CA$ , erit  $CK \cdot CA + CA \cdot CR = CA \cdot CK + CK \cdot CA + NK \cdot NA$ . hoc est  $CK \cdot CR :: NK \cdot NA$ .

Notetur in figuris sequentibus esse perpetuo  $CA \cdot CR :: I \cdot R$ . quod semel, brevitatis causâ, monitum esto.

Fig. 130,  
131.

IV. Hinc consecutatur; primò; Si fuerit  $AN \sqsubset CR$ , quòd refractus  $N^a$  cum axe  $AC$  prorsum excurrere conveniet. Nam erit  $CK \cdot AN \supset CK \cdot CR :: NK \cdot AN$ . adeoque  $CK \supset NK$ .

Fig. 129.

V. Secundò; si fuerit  $AN = CR$ , refractus  $N^a$  ad  $AC$  parallelus erit.

Nam sit  $NH$  ad  $AC$  parallela. quum itaque sit  $CA \cdot AN :: (CA \cdot CR ::) I \cdot R$ ; erit  $AN$  ipsius  $HN$  refractus. ergò vicissim  $NH$  ipsius  $AN$ .

Fig. 130.

VI. Tertiò; Si fuerit  $AN \supset CR$ , refractus  $N^a$  cum  $AC$  retrò conveniet extractus.

Erit enim tunc  $CK \cdot AN \sqsubset CK \cdot CR :: NK \cdot AN$ . ac inde  $CK \sqsubset NK$ .

Fig. 131.

VII. Hinc clarum est; Si fuerit  $AB$  non minor quàm  $CR$ , omnes refractos versus  $AC$  procurrentes convergere. erit enim tunc semper  $AN \sqsubset CR$ .

VIII. Subnotetur autem si fuerit saltem  $AB = CR$ , axi propiores radios in sensibilem parallelismum refringi.

IX. Item, Si  $AT$  circulum tangat, & fuerit  $AT \supset CR$ ; manifestum est omnes refractos retrò protractos cum  $AC$  concurrere. tunc enim semper est  $AN \supset CR$ .

X. Clarum est quoque, si  $AN = CR$ , omnes arcui  $BN$  incidentium refractos retrò productos, omnes autem arcui  $NT$  incidentium refractos antrorsum procurrentes axi occurrere.

XI. Quum autem in casu, propositi maximè contrario (quum nempe  $I \supset R$ ; & radii concavis incidunt partibus) adsimilis contingat diversitas, hanc quoque breviter attingemus.

I. Si



1. Si fuerit  $AN \subset CR$ , refractus  $N_\alpha$  cum  $AC$  retrò tractus Fig. 132. conveniet.

Nam  $CK \supset NK$ . (ut in priore casu).

2. Etiam hîc si  $AN = CR$ , refractus  $N_\alpha$  fit ipsi  $AC$  parallelus.

Nam erit  $CK = NK$ . quod in hoc casu nisi  $K$  infinitè distet contingere nequit.

3. Si  $AN \supset CR$ ; refractus  $N_\alpha$  prorsum excurrens axi occurrat.

Nam hîc  $CK \subset NK$ .

4. Si  $AB \supset CR$ ; omnes refracti directè progredientes ad  $AC$  Fig. 133. convergunt. Erit enim quivis incidens  $AN \supset CR$ .

5. Quum  $AN = CR$ , evidens est omnes arcui  $BN$  incidentes retrorsum versus  $CA$  refractos convergere; omnes autem ad partes  $NT$  cadentes antrorsum versus  $CB$  refringi.

XII. Hinc apparet sub istis duobus generalibus casibus tres à diverso Fig. 134, puncti radiantis intervallo subnascentes speciales casus comprehendi; 135, 136. nempe vel omnes ab axe post refractionem progredientes divergunt, vel omnes ad ipsum convergunt, vel aliqui divergunt, alii convergunt, his intercedente medio quodam ad illum parallelo. quæ subnotâsse discrimina videbatur operæ pretium ac determinâsse. Subdimus etiam quoad reliquos generales casus simplicius sese rem habere; scilicet eodem semper modo: Omnes enim ad cavum densius incidentium refracti directè procedentes ab axe divergunt; Ut & omnes eorum, qui convexo ratori impungunt; id quod è generalissimis refractionum legibus immediatè sequitur, & è simplice secundum illas linearum ductu dilucescit. His admonitis in orbitam regressi pergamus.

XIII. E præmissis Theoremate non difficilè conficitur hoc *Problema*: Dato in axe puncto  $K$ , refractum designare, qui per hoc ipsum transeat. ||

Hoc nempe pacto. Reperiatur punctum  $G$ , ut sit  $KG.AG::CK.CR$ . item fiat  $GF.FA::CK.CR (::KG.AG)$ . tum centro  $F$ , intervallo  $FG$  describatur circulus refringentem interfecans ad  $N$ ; erit connexa  $NK$  incidentis  $AN$  refractus. Lect. 10.  
Num. 25.  
Fig. 137.

Nam ducatur  $FN$ ; & ob  $KG.AG::GF.FA$ . erit permutatum  $KG.GF::AG.FA$ . dividendoque  $KF.GF::GF.FA$ . hoc est  $KF.FN::FN.FA$ . quare triangula  $KFN$ ,  $NFA$   
N assimi-

Fig. 137.

assimilantur. unde  $NK.KF::AN.NF$ . seu permutando  $NK.AN::KF.NF$ . erat autem prius  $KF.NF::GF.FA::CK.CR$ . est igitur  $NK.AN::CK.CR$ . unde (juxta dictum Theorema) constat factum.

XIV. Ad constructionem istam advertentes animum, hujusmodi facile *Consectaria* deducetis:

1. Si circulus  $GNH$  *refringentem* contingat ad  $H$ ; ipsius  $AH$  (perpendicularis utique) *refractus* in  $K$  terminabitur; & aliorum incidentium *refracti* ad unas ipsius  $K$  partes (ultra nempe vel citra  $K$  respectu centri, pro diversitate casuum ab ipsius  $A$  positione resultantium) cadent.
2. Si dictus ille circulus *refringenti* non occurrat omnino, *Problema* constructionem respuet; nec ullus *refractus* punctum  $K$  permeabit.
3. Si circulus  $GNH$  *refringenti* coïncidat (id quod facile concipi potest, & in aliquo revera casu contingit) omnes *refracti* in punctum  $K$  confluent. || Hæc & alia constructionem istam *consectantur solenter* expansam; quorum saltem nonnulla haud abs re fuerit *exertius* ostendi; velut hoc imprimis palmarium.

XV. Si fuerit  $AB.CR::BZ.CZ$ ; dico punctum  $Z$  esse limitem, ultra vel citra quem nullus *refractus* axim interfecat; seu perpendicularis ipsius  $AB$  *refractus* in  $Z$  terminari.

Nam cujusvis incidentis  $AN$  *refractus* axi occurrat in  $K$ , erit ideò  $CK.CR::NK.NA$ . ergò quum sit  $CR.CZ::AB.BZ$ ; erit  $CK.CR+CR.CZ=NK.NA+AB.BZ$ .

Fig. 138.

1. Est autem (in prima figura, ubi puncta  $Z$ , &  $K$  sunt ad partes centri, vel ubi *refracti* ad axem directè procurentes convergunt)  $BK \sqsubset NK$ , &  $AB \supset AN$ ; adeoque  $BK.AB \sqsubset NK.NA$ . ergò  $CK.CR \sqsubset CR.CZ \supset BK.AB+AB.BZ$ . hoc est  $CK.CZ \supset BK.BZ$ . vel inversè permutando  $BK.CK \sqsubset BZ.CZ$ . dividendoque  $BC.CK \sqsubset BC.CZ$ . ergò  $CK \supset CZ$ ; adeoque punctum  $K$  supra  $Z$  existit, versus centrum; quod erat propositum ostendere.

Fig. 139.

2. In secundâ verò figura (ubi puncta  $Z$ ,  $K$  ad alteras supra punctum  $A$  partes à centro averfas cadunt) connectatur subtensa  $BN$ , & ducatur  $AS$  ad  $KN$  parallela; hæc secabit angulum  $BAN$ , majorem ipso  $BKN$ , vel  $BAS$ ; & cum angulus  $ABN$  sit obtusus, erit  $AN \sqsubset AS$ . adeoque  $KN.AN \supset KN.AS::KB.AB$ . erit etiam hinc igitur (ut supra)  $CK.CZ \supset BK.BZ$ . vel permutatim  $CK.BK$

$\Rightarrow$  CZ. BZ. dividendóque CB. BK  $\Rightarrow$  CB. BZ. adeóque BK  $\Leftarrow$  BZ, hoc est punctum K magis quàm Z à centro elongatur.

3. Haud dissimilis in aliis casibus erit *Demonstratio*; ut in hoc, ubi Fig. 140.  
I  $\Rightarrow$  R, ad convexas; est enim hic (ut in præcedente) KB. AB  $\Rightarrow$  KN. AN. adeóque (supra monstratis insistendo) CK. CZ  $\Leftarrow$  KB. BZ. vel permutando CK. KB  $\Leftarrow$  CZ. BZ. dividendóque CB. KB  $\Leftarrow$  CB. BZ. unde KB  $\Rightarrow$  BZ. adeóque punctum K centro semper vicinius est quàm Z.

XVI. Hæc autem cùm, modo suo mutatis mutandis, ad omnes casus transferri possint, habentur indè determinati refractorum limites, hoc est apparentia radiantium punctorum A loca, respectu oculi centrum habentis in axe AC situm; juxta doctrinam à nobis toties inculcatam.

XVII. Id autem hîc in duobus casibus (utroque nimirum ad circuli cavas) peculiare venit observandum cùm sit  $CB = CR$ , omnes refractos in ipso puncto Z (ut supra definito) retrò protractos congregari. Nam ob  $AB.BC::AB.CR::BZ.CZ$ . erit dividendo  $AC.BC::BC.CZ$ . quapropter ad punctum quodvis N adsumptum connexis AN, ZN, erit  $ZN.AN::(CZ.CN::)CZ.CR$ . unde ZN refractus erit incidentis AN.

XVIII. Hinc etiam si fuerit  $AB = CR$ , consequetur punctum Z Fig. 141.  
à centro infinite distare; quia nempe tum ob  $AB.CR::BZ.CZ$ , erit  $BZ = CZ$ ; id quod fieri nequit, nisi punctum Z ita elongetur infinite.

XIX. *Consectantur* & hæc: Si punctorum radiantium A,  $\alpha$  limites Fig. 142,  
sint puncta Z,  $\zeta$ , erit  $AC.AB + BZ.CZ = \alpha C. \alpha B + B\zeta.C\zeta$ . 143.  
 $C\zeta$ .

Nam è præmissis facile constat esse

$$\begin{aligned} \text{tam } AC.AB + BZ.CZ &= \} I.R. \\ \text{quam } \alpha C. \alpha B + B\zeta.C\zeta &= \} \end{aligned}$$

XX. Unde  $C\zeta \Leftarrow CZ$ . Nam ob  $BC.AB \Rightarrow BC. \alpha B$ . componendóque  $AC.AB \Rightarrow \alpha C. \alpha B$ . erit  $BZ.CZ \Leftarrow B\zeta.C\zeta$ . dividendóque  $BC.CZ \Leftarrow BC.C\zeta$ . adeóque  $C\zeta \Leftarrow CZ$ .

Fig. 144.

XXI. Imò universim si radii quivis  $AF$ ,  $\alpha\phi$  ad circulum refringentem æqualiter inclinentur, hisque convenient refracti  $FL$ ,  $\phi\lambda$ , erit  $C\lambda \sqsubset CL$ . id quod hoc modo non inelegantè ostenditur. Ductur recta  $BX$  cum  $BC$  angulum efficiens parem angulo refracto ad positam inclinationem pertinenti; perque puncta  $F$ ;  $\phi$ ; & centrum  $C$  transeuntes rectæ ipsi  $BX$  occurrant punctis  $P$ ,  $\varpi$ . tum quoniam triangula  $FCL$ ,  $BCP$  æquiangula sunt (angulus enim  $CBP$  angulo  $CFL$  ex constructione par est, & ang.  $BCP$  verticali suo  $FCL$  æquatur) nec non latus  $CB$  lateri  $CF$  æquatur, erit  $CP = CL$ . Simili planè discursu est  $C\varpi = C\lambda$ . Porro, quia  $C\phi$  ad  $C\alpha$  (hoc est Sinus anguli  $C\alpha\phi$  ad Sinum anguli  $C\phi\alpha$ ) majorem rationem habet, quàm  $CF$  ad  $CA$  (hoc est quàm Sinus anguli  $CAF$  ad Sinum anguli  $AFC$ , vel æqualis anguli  $C\phi\alpha$ ) liquet angulum  $C\alpha\phi$  majorem esse angulo  $CAF$ , adeoque reliquum  $\alpha C\phi$  minorem esse reliquo  $ACF$ ; vel angulum  $PCB$  angulo  $\varpi CB$ . unde liquet esse  $C\varpi$  majorem quàm  $CP$ ; hoc est  $C\lambda$  majorem esse quàm  $CL$ : Quod E. D.

*Coroll.* Vides arcum  $BF$  majorem esse arcu  $B\phi$ .

Notes etiam omnes ejusdem inclinationis refractos ope ductæ rectæ  $BX$  promptissimè designari. sed hæc an  $\varpi$ ;  $\phi$ ;  $\lambda$  fuerint nescio.

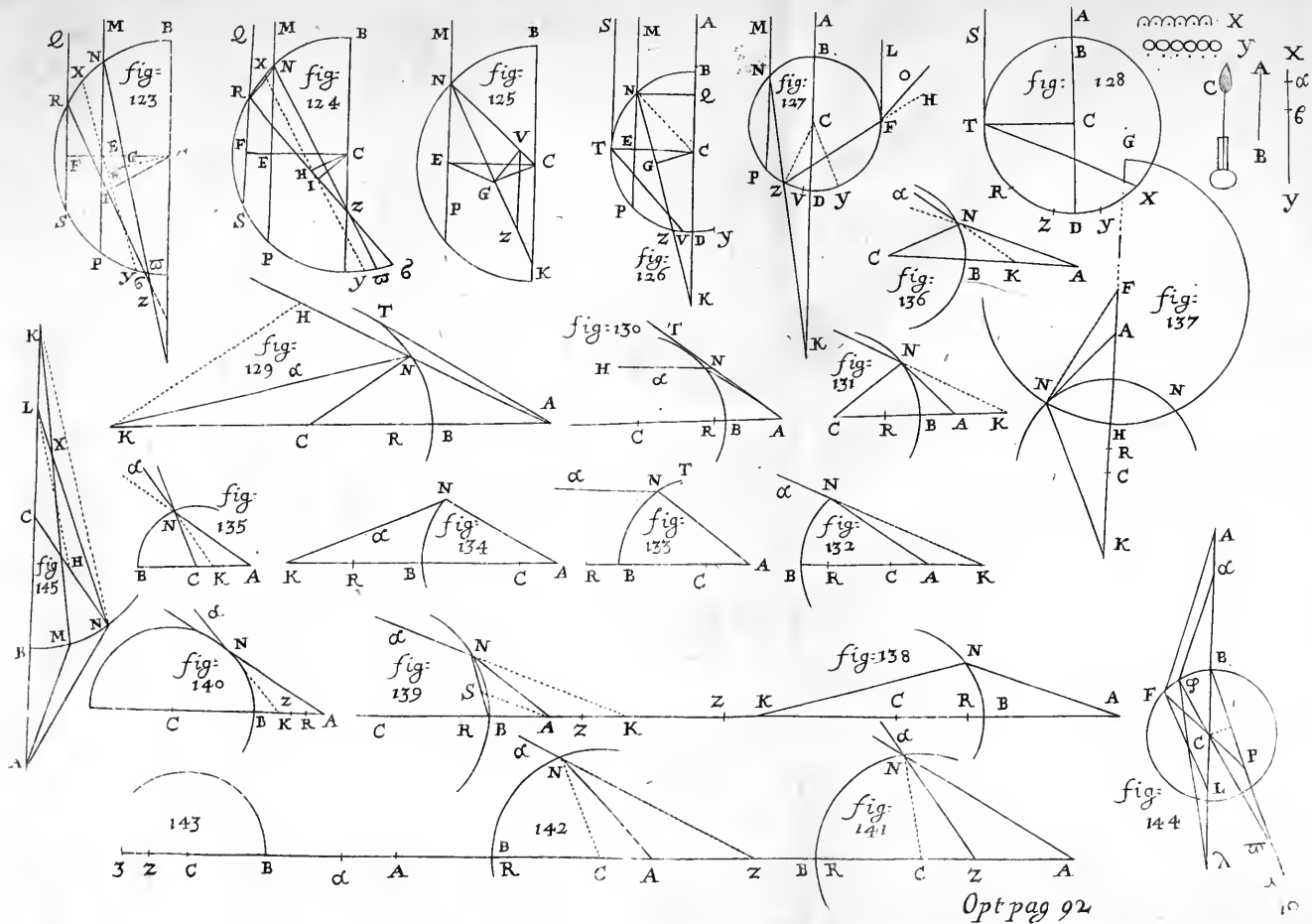
Fig. 145.

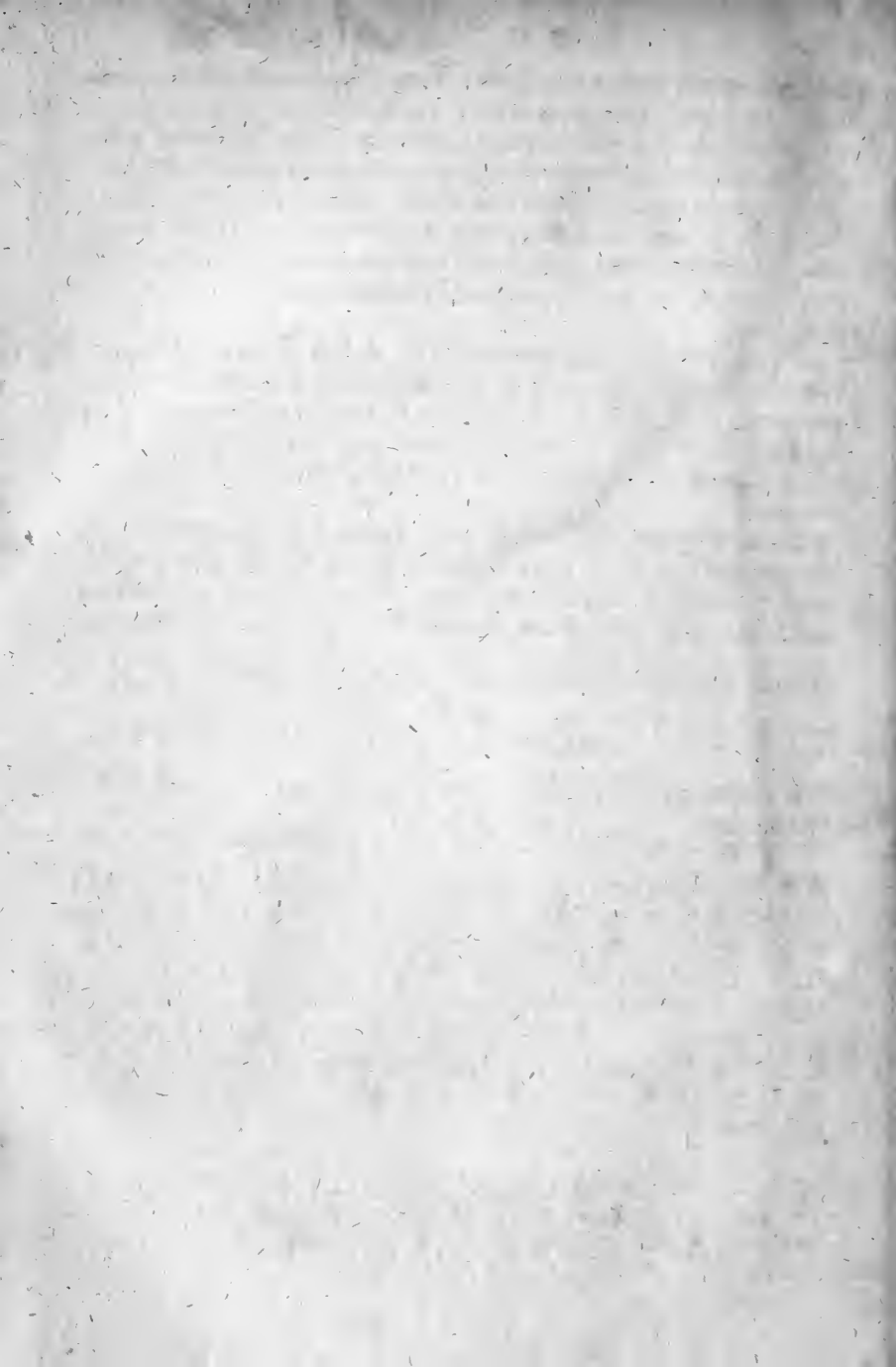
XXII. *Subjiciam & hoc Theorema:* Convexo densiori incidentium radorum  $AM$ ,  $AN$  (quorum  $AN$  sit obliquior) refracti  $MK$ ,  $NL$  axem ad easdem partes, directè pergentes, secant, iste ad  $K$ ; hic ad  $L$ ; dico fore  $CK$  majorem quàm  $CL$ .

Nam connexis  $CN$ ,  $KN$ ; & ductâ  $LH$  ad  $KN$  parallelâ; quoniam, è præmissis, est  $CK : CR :: MK : MA$ . &  $CR : CL :: NA : NL$ . erit  $CK \cdot CK + CR \cdot CL = MK \cdot MA + NA \cdot NL$ . est autem  $NK \cdot NA \sqsupset MK \cdot MA$  (quia  $NK \sqsupset MK$ , &  $NA \sqsubset MA$ ) ergo  $CK \cdot CR + CR \cdot CL \sqsubset NK \cdot NA + NA \cdot NL$ . hoc est  $CK \cdot CL \sqsubset NK \cdot NL$ . hoc est  $NK \cdot HL \sqsubset NK \cdot NL$ . quapropter est  $LH \sqsubset NL$ . est autem angulus  $LCN$  obtusus; ergo recta  $LH$  angulum  $CLN$  secat; ac angulus  $LHC$  interno  $LCN$  major est; hoc est angulus  $KNC$  angulo  $LNC$  major est, unde liquido patet fore  $CK \sqsubset CL$ .

*Coroll.*  $CK \cdot CL = MK \cdot MA + NA \cdot NL$ .

XXIII. Hinc, ejusmodi omnes refracti seipfos prius quàm axem intersecant, velut ad  $X$ . || Hoc speciminis loco pro casu, qui præmanibus.





manibus. propter alios qui similia volet, ipse viderit, & sibi paraverit. ego jam aliò progredior; eò scilicet, ut locum definiam imaginis in dato quovis refracto apparentis; prætervehemur enim illud in his certè casibus *intricatisimum Problema* (cujusque Solutio nullatenus aut laborem quem exigit, aut temporis jacturam compensabit) quo jubetur per datum punctum transeuntem refractum designare. positione datum igitur refractum accipimus; & in hoc imaginis locum ex hoc uno Theoremate determinamus.

XXIV. Duorum incidentium ANP, ARS sibi quàm proximo- Fig. 146.  
rum concipiantur refracti Nσ, Rσ sese puncto Z decussantes; bise-  
centurque subtensæ NP, Nσ punctis E, G; (à rectis nempe CE,  
CG ad illas perpendicularibus) dico rationem NZ ad GZ è ratio-  
nibus CE ad CG (hoc est I. R.), NG ad NE, ac AN ad AE  
componi.

Ducantur enim CK ad RS, & CI ad Rσ perpendiculares; in-  
que productis CE, CG capiantur CF = CK; & CH = CI;  
& per F ducatur TV ad NP parallela; & per H etiam XY ad Nσ  
parallela. Jam est AP. AN :: arc PS. arc NR (ob sumptam  
arcuum indefinitam parvitatem). ergò  $\frac{AP \pm AN}{2}$ . AN ::

$\frac{arc PS \pm arc NR}{2}$ . arc NR. hoc est AE. AN :: arc NT. arc

NR. item est NZ. Zσ :: arc NR. arc σσ. ac indè NZ.

$\frac{NZ \pm Z\sigma}{2} :: arc NR. \frac{arc NR \pm \sigma\sigma}{2}$ . \*hoc est NZ. ZG :: arc \* *Leff. 97.*

NR. arc NX. ergò, rationes æquales adjungendo, est AE. AN *Num. 15.*  
+ NZ. ZG = arc NT. arc NR + arc NR. arc NX = arc  
NT. arc NX. quoniam autem est CE. CG :: (I. R. :: CK.  
CI ::) CF. CH. vel permutando CE. CF :: CG. CH; erit,  
\*juxta præmonstrata, arc NT. arc NX = NG. NE + CE. CG. \* *12 Leff. 2.*  
quapropter erit AE. AN + NZ. ZG = NG. NE + CE. *Num. 6.*  
CG. unde (rationes hinc indè pares subducendo) erit NZ. ZG ::  
+ CE. CG + NG. NE + AN. AE. Quod propositum fuit  
ostendere.

XXV. Hinc, si fiat CE. CG :: NE. L; & AN. AE :: L.  
M; erit NZ. ZG :: NG. M. Nam NG. NE + CE. CG  
+ AN. AE = NG. NE + NE. L. + L. M = NG. M.  
unde.

unde Problematis constructio, seu puncti Z dererminatio habetur.

Fig. 147.

XXVI. Subneſtam & ab amico communicatam (aliâ methodo repertam ab ipſo, concinnèque demonſtratam) conſtructionem : Duc NR incidenti AN perpendiculararem, & ſecantem axin in R. Fac NP.  $N\omega :: NR.T$ . duc NQ refracto NK perpendiculararem, & æqualem ipſi T; denique jungatur QC; hæc producta ſecabit NK in foco quaſito Z.

XXVII. Hujusmodi verò punctum Z eſſe locum ipſiſſimum imaginis puncti A, oculo apparentis in ipſa  $N\omega$  conſtituto, ſæpius expoſitæ rationes manifeſtant.

\* In Num. 25.

XXVIII. Attendenti porrò conſtabit, ſiquidem fuerit \*NG ad M ratio æqualitatis, quòd punctum Z infinito à puncto G, vel N intervallo diſtabit; ſeu proximi radio  $N\omega$  refracti ipſi  $N\omega$  paralleli erunt; ſi ratio NG ad M ſit majoris inæqualitatis, quòd punctum Z exiſtet infra G, vel in NG antrorſum protracta; verum denuò ſi  $NG \rightarrow M$ , quòd punctum Z ſupra N, vel in NG retrò tractâ verſatur. Hæc ſuffecerit innuiſſe. Hinc etiam poſticæ circuli partis illuminatæ quantitas utcunque poſſit determinari. ſed ad locum Solidum res ſpectat, ipſamque proinde miſſam facio.

Fig. 148.

XXIX. Inferemus autem hîc *Phænomeni* cujuſdam ſatis obvii, quòdque nonnullis forſan (*utpote communibus Opticæ decretis apparenter adverſum*) mirabile videatur, explicationem. Sit lucidi puncti A (modicè diſtantis, & vividè radios ejaculantis) ad arcum circularem MBN (ab axe AB biſectum) imago, ſeu focus Z; & per Z, ad ipſam AZ perpendicularis traducta concipiatur linea XY. porrò, deſumatur aliud punctum remotius E; liquet ejus imaginem citra punctum Z (centrum verſus) jacere; ductis itaque rectis EM, EN, harum refracti adhuc altius ſe interſecant, puta ad K; productæque MK, NK lineam XY ſecent punctis O, P. quinetiam ulterius accipiatur punctum F; ductarumque rectarum FM, FN refracti ſint ML, NL; lineæ XY occurrentes ad puncta R, S; quibus peractis manifeſtum eſt intervallum R Si poſto OP majus eſſe. Hinc facilis habetur ratio, cur punctum lucidum (velut *ardens lucerna*, vel *Imago Solis* ad *Speculum* aut *lentem diaphanam* effecta, (quin & *ſtellæ fixæ*) quæ propter exiguitatem ſuam apparentem punctorum ad inſtar haberi poſſunt) quòd à diſtinctæ viſionis loco longius amoveretur, eò (contra quàm in aliis viſibili-



visibilibus obvenit) majus apparet. Nam si arcus  $MNB$  oculi superficie repræsentet, (*pupilli amplitudini respondentem*) linea  $XY$  fundum oculi,  $A$  locum distinctæ visionis; ejusmodi lucens ad  $A$  positum satis angustum circa  $Z$  spatium illustrabit; ad  $E$  verò constitutum, validè radios vibrans, totum coruscatione sua spatium  $OP$  afficiet; ad  $F$  denique collocatum adhuc majus intervallum  $RS$  perceller, indeque grandiorē sui speciem exhibebit. In placidè verò lucem remittentibus aliter se habet, quoniam pauciores, & languidiūs agentes qui extremis  $O$ ,  $P$  vel  $R$ , Sallabuntur radii nullam sui perceptionem excitant.

Fig. 148.

Eò lubentius hanc, adeò perspicuam, hujusmodi *Phænomenon* assignamus rationem, quoniam in eorum reddendis causis ita titubat magnus ille *Galilæus*, nescio quos, ex refractionibus, relectionibusve quibusdam commentitiis oriundos, ascititios suggerens cincinnos. ||

XXX. Quin hic tandem *Dioptricam simplicem circularem claudemus*, quam utcumque quàm paucissimis ita complexi sumus, ut præcipua saltem (quæ videbantur) & notatu digniora perstrinxerimus. prius autem *Catoptricam circularem*; nec non utramque, tam *Dioptricam* quàm *Catoptricam*, planam, quantum instituto nostro visum est congruere, pertractavimus. quibus perfuncto mihi propositum aliquando fuit ad curvas alias, conicas præsertim sectiones, haud dissimili methodo pertentandas cogitationem extendere. Sed enim, cum in his tricis *Geometricis* etiamnum satis superque commoratus sim; & præter ea quæ circa conicas sectiones à nobis pridem insinuata sunt (quæ & ab aliis luculentè tractata prostant) reliqua non ita magnum usum spondeant; contentus hæc primarias, in usu maximè politas, & usui præsertim accommodatas superficies, ultra paullò quàm hætenus attentatum aut peractum scirem, excussisse; cæteras omnino missas faciam.

XXXI. Porro, quoad inflectiones istas, quos pluribus successivè planis, aut Sphæricis Superficiebus, utcumque constitutis aut compositis, incidentes subeunt radii; quæ conveniunt illis Symptomata, possunt ea de præmissis elici; quorum certè præcipuum est, quod apparentis puncti locum respicit ab inflectionibus ad istas superficies factis resultantem; in hoc enim indagando, determinandoque potissimum hæc disquisitiones versantur; Hunc igitur saltem definitum exhibebimus, idque satis commodè, ex uno quodam Theoremate, seu regula generali; cui exempla quædam, communis usûs in gratiam selecta, eorūque qui in hæc inciderit minuendo labori præsertim comparata, subjungemus. Ista verò, nè jam tædio Sinus, sequenti reservamus. Lect.

## LECT. XIV.

I. *S*ub precedentis calcem, Regulam pollicebamur, exemplis stipatam, ex qua punctorum è variis inflectionibus resultant, imagines dignoscantur. illam nunc exhibemus quàm simplicimè conceptam.

Sit  $ABEFO$  radius principalis, puncti radiantis  $A$  speciem per oculi centrum  $O$  deferens, ex incidente primo  $AB$ , & inflexis  $BE$ ,  $EF$ ,  $FO$  (in directum aut secùs dispositis) constans; tum puncti  $A$  respectu oculi in recta  $BE$  positi, & ex inflectione ad superficiem  $B$  resultans (è præmissis utique designabilis) imago sit  $Z$ . item hujus  $Z$  (quod jam veluti radians concipiatur) respectu oculi in recta  $EF$  constituti, & ab inflectione ad superficiem  $E$  emergens imago sit  $Y$ ; demùm puncti  $Y$  (tanquam in superficiem  $F$  radiantis) respectu oculi in  $FO$  collocati sit imago  $X$ . erit hoc punctum  $X$  imago cunctis ab his inflectionibus proveniens. neque secùs quoruncunque fuerint inflectiones sese res habebit; enimverò semper ex illa tali postrema inflectione resultans imago, eadem erit cum illa, quam omnes exhibent.

Hujus effati veritas è constructione satís apparet; è qua faciliè colligitur proximorum ipsi  $AB$  incidentium hinc inde radiorum inflexos tandem circa punctum  $X$  ipsum  $FX$  interfecare. vel ità rem collegeris: punctum  $Z$  est puncti  $A$  imago; & punctum  $Y$  ipsius  $Z$ ; denuóque punctum  $X$  ipsius  $Y$ ; itaque punctum  $X$  ipsius  $A$  imago erit, qualem nempe res hic fert, remota. Strictiore longiusculo discursu posset hoc comprobari, sed quorsum rem satís claram intricare?

II. Exempla jam, quæ dixi, seu è præmissis deducta consecutaria subnectam. Notetur autem imagines, quæ in iis proponuntur designandæ, oculum respicere Centrum habentem in ipso radiationis axe (qualis est recta  $BD$ ) constitutum. item diversarum superficierum ac radiationum axes sibi met in directum poni. præsumatur etiam in refractionibus ex ære factis ad vitrum fore  $I.R.:5.3$ ; ad aquam verò fore  $I.R.:4.3$ . (hæ nempe rationes veris probè congruæ depre-

Fig. 149,  
150.

deprehenduntur) : addo, confuſionis evitandæ cauſâ ſymbolum I dehinc in his exemplis perpetuò majorem proportionis refractiones dimetientis terminum denotare, quocunque de medio in quodcunque peragatur refractio. porrò, medium primum infringens perpetuò denſius intelligatur rariori circumdatum. item, in figuris appoſitis litera C denotat centrum anterioris circuli, K centrum poſterioris; & B verticem anterioris, D verticem poſterioris, denuò deſignat Y locum imaginis quaſitam.

Hiſce præmonitis, primum de longinquo radiantium, ſeu parallelos ejicientium radios punctorum imagines, pro lentium varietate, ſic determinantur.

I. *Ad lentem plano-convexam.*

Fig. 151.

II. *Ad lentem plano-concavam.*

Fiat  $I - R.R :: DK.DY.$

*In Vitro* eſt  $DY = \frac{1}{2} KD.$

*In Aqua* eſt  $DY = \frac{1}{3} KD.$

III. *Ad lentem convexo-planam.*

Fig. 151,

IV. *Ad lentem concavo-planam.*

152.

Fiat  $\begin{cases} I - R.I :: BC.BZ; & \& \\ I.R :: DZ.DY. \end{cases}$

*In Vitro*  $DY = \frac{1}{2} BC - \frac{1}{3} BD.$

*In Aqua*  $DY = \frac{1}{3} BC - \frac{1}{4} BD.$

V. *Ad lentem convexo-convexam.*

Fig. 152.

VI. *Ad lentem concavo-concavam.*

Fiat  $\begin{cases} I - R.I :: BC.BZ; & \& \\ \frac{1}{R} KZ - DZ.DZ :: DK.DY. \end{cases}$

Coroll. *Ad integram Spharam.*

Fiat  $2I - 2R.I :: CD.CY.$

VII. *Ad lentem convexo-concavam.*

Fig. 152,

VIII. *Ad lentem concavo-convexam.*

153.

Fiat  $I - R.I :: BC.BZ; &$

O

Si

Fig. 152,  
153.

1. Si punctum Z cadat inter C, & K, fac  $DZ + \frac{1}{R}KZ . DZ :: DK . DY$ ; & cape DY ad partes lentis versus K.

2. Si punctum Z cadat extra CK, & sit insuper  $DZ - \frac{1}{R}KZ$ ; fac  $DZ - \frac{1}{R}KZ . DZ :: DK . DY$ ; & cape DY ad partes lentis versus K.

3. Si  $DZ = \frac{1}{R}KZ$ , imago Y infinitè distabit.

4. Si  $DZ = \frac{1}{R}KZ$ ; fiat  $\frac{1}{R}KZ - DZ . DZ :: DK . DY$ , & cape DY ad partes lentis aduersas ipsi K.

De sensibilibiter autem propinqua distantia radiantium seu divergentes radios emittentium punctorum (qualia semper designat punctum A) imagines (ut & illæ quas ad ejusmodi puncta convergentes efficiunt radii) hoc pacto determinantur.

Fig. 154,  
155.

I. *Ad lentem plano-planam diverg.*

II. *Ad lentem plano-planam converg.*

Fiat  $\begin{cases} R . I :: AB . BZ, & \\ I . R :: DZ . DY. \end{cases}$

Brevius. Fiat  $I . I - R :: BD . AY$ .

Fig. 156.

III. *Ad lentem plano-convexam diverg.*

IV. *Ad lentem plano-concavam converg.*

Fiat  $R . I :: AB . BZ$ . & cum Z cadit

1. Extra DK, si  $\frac{1}{R}KZ < DZ$ ; fac  $\frac{1}{R}KZ - DZ . DZ :: DK . DY$ ; & cape DY ad partes lentis aduersus A.

2. Si  $\frac{1}{R}KZ = DZ$ ; imago distabit infinitè.

3. Si  $\frac{1}{R}KZ > DZ$ ; fac  $DZ - \frac{1}{R}KZ . DZ :: DK . DY$ ; & cape DY versus A.

4. Cum

4. Cum Z cadit inter puncta D, K, fac  $DZ + \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$ ; & cape DY versus A.

V. *Ad lentem plano-concavam diverg.*

Fig. 156,  
157.

VI. *Ad lentem plano convexam converg.*

Fiat  $\left\{ \begin{array}{l} R . I :: AB . BZ ; \& \\ \frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY . \end{array} \right.$

VII. *Ad lentem convexo-planam diverg.*

Fig. 157.

VIII. *Ad lentem concavo-planam converg.*

1. Si  $AB = \frac{R}{I} AC$ , puncta Z, & Y ad lentis partes puncto A adversas reperientur, facto  $AB = \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ . \& I . R :: DZ . DY$ .

2. Si  $AB = \frac{R}{I} AC$ , imago infinitè distabit.

3. Si  $AB > \frac{R}{I} AC$ , deprehendentur Z, & Y versus A, facto  $\frac{R}{I} AC - AB . AB :: BC . BZ ; \& I . R :: DZ . DY$ .

IX. *Ad lentem concavo-planam diverg.*

Fig. 158.

X. *Ad lentem convexo-planam converg.*

Si A cadat extra BC, fac  $AB = \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$ ; sin A cadat inter B, & C, fac  $AB + \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$ ; tum fiat  $I . R :: DZ . DY$ .

Fig. 158,  
159.

XI. *Ad lentem convexo-convexam diverg.*

XII. *Ad lentem concavo-concavam converg.*

1. Si  $AB \sqsubset \frac{R}{I} AC$ , facto  $AB - \frac{R}{I} AC$ .  $AB :: BC . BZ$ ,  
&  $\frac{I}{R} KZ - DZ :: DK . DY$ ; puncta Z, Y adversus A cadunt,

2. Si  $AB = \frac{R}{I} AC$ , fac  $I - R$ .  $R :: DK . DY$ ; & cape DY  
adversus A.

3. Si  $AB \supset \frac{R}{I} AC$ ; fac  $\frac{R}{I} AC - AB$ .  $AB :: BC . BZ$ ,  
& sume BZ versus A'. Jam cum Z cadit extra DK, si primò sit  
 $\frac{I}{R} KZ \sqsubset DZ$ , fac  $\frac{I}{R} KZ - DZ$ .  $DZ :: DK . DY$ ; & sume  
DY adversus A.

4. Secundò, si  $\frac{I}{R} KZ = DZ$ , imago distabit infini è.

5. Tertio, si  $\frac{I}{R} KZ \supset DZ$ , fac  $DZ - \frac{I}{R} KZ$ .  $DZ :: DK .$   
DY; & sume DY versus A.

6. Quum denuò cadit Z inter D, & K, fiat  $DZ + \frac{I}{R} KZ . DZ ::$   
DK . DY; sumatúrque DY versus A.

*Corol. Ad integram Spharam diverg.*

1. Si  $AB + AC \sqsubset \frac{2R}{I} AC$ ; fiat  $AB + AC - \frac{2R}{I} AC$ .  
 $AC :: BC . CY$ ; & cape CY adversus A.

2. Si  $AB + AC = \frac{2R}{I} AC$ ; imago in infinitum abit.

3. Si  $AB + AC \supset \frac{2R}{I} AC$ ; fiat  $\frac{2R}{I} AC - AC - AB$ .  
 $AC :: BC . CY$ ; capiatúrque CY versus A.

Fig. 159.

XIII. *Ad lentem concavo-concavam diverg.*

XIV. *Ad lentem convexo-convexam converg.*

Si

fig: 155

2

R

D

A

y

z

z

A

y

fig: 154

B

D

1

K

D

B

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

y

A

z

y

z

K

z

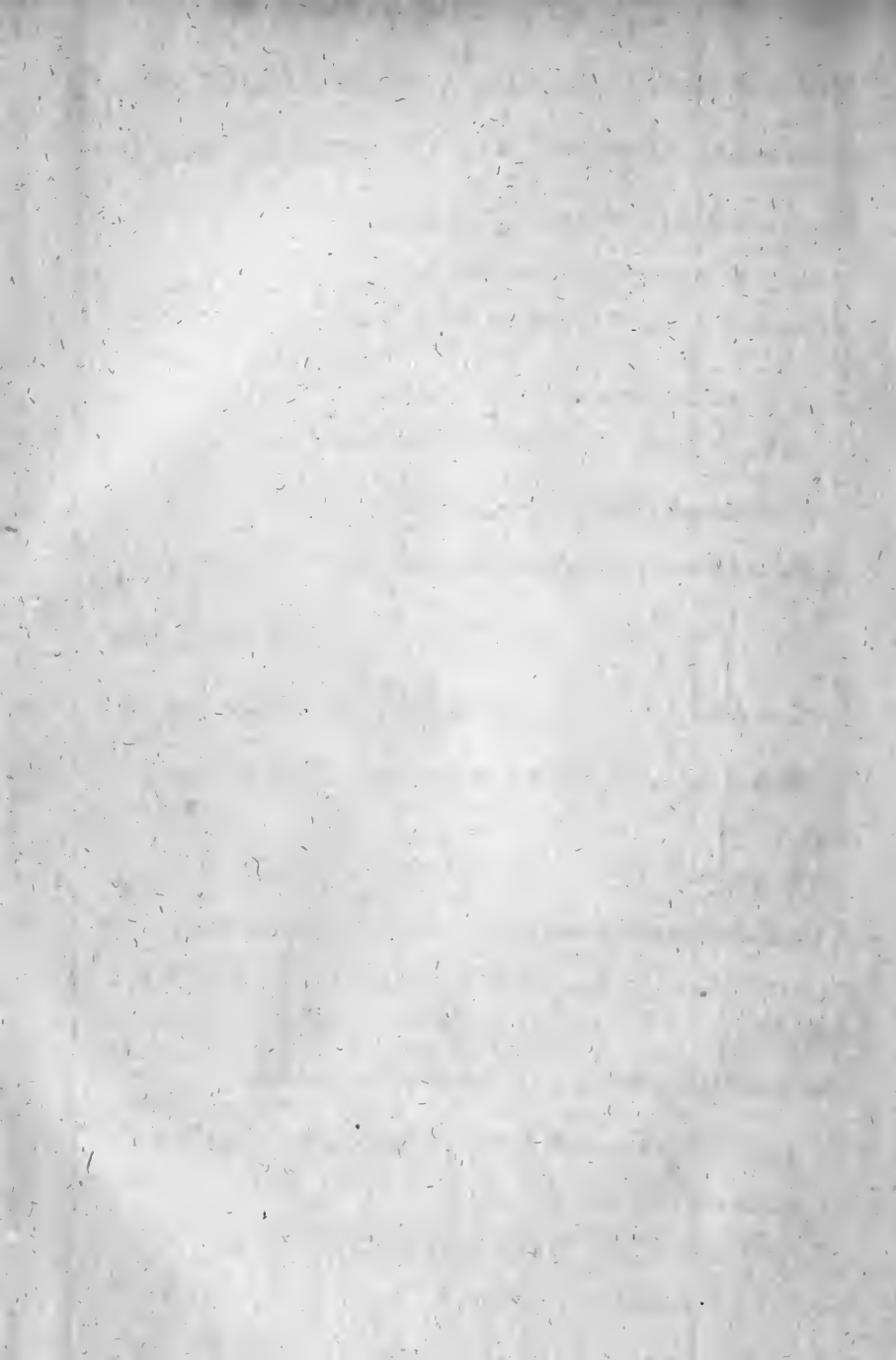
y

A

z

y

z





Si A cadat extra B C, fiat  $AB - \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$ ; sin A Fig. 159.

cadat inter B, C; fiat  $AB + \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$ ; deinde fac

$$\frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY,$$

Coroll. *Ad integram Spharam converg.*

Si punctum A extra B C ponatur, fiat  $AB + \frac{I-2R}{I} AC :: BC .$

CY. sin A cadat inter B, & C; fiat  $AB + \frac{2R-I}{I} AC . AC ::$

BC . CY; & cape C Y ad partes centri versus A.

XV. *Ad lentem convexo-concavam diverg.*

Fig. 160.  
161.

XVI. *Ad lentem concavo convexam converg.*

1. Si  $AB \Rightarrow \frac{R}{I} AC$ ; puncta Z, & Y versus A cadunt, facto

$$\frac{R}{I} AC - AB . AB :: BC . BZ; \& \frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY.$$

2. Si  $AB = \frac{R}{I} AC$ ; fac  $I - R . R :: DK . DY$ ; & cape D Y versus A.

3. Si  $AB \Leftarrow \frac{R}{I} AC$ ; fac  $AB - \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$ ; & cape B Z adversus A. Jam quum Z cadit extra D K, tum primò si  $\frac{I}{R} KZ \Leftarrow DZ$ , fac  $\frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY$ ; & cape D Y versus A.

4. Secundò, si  $\frac{I}{R} KZ = DZ$ , imago infinitè distabit.

5. Tertiò, si  $\frac{I}{R} KZ \Rightarrow DZ$ , fac  $DZ - \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$ , & sume D Y adversus A.

6. Sed quando Z inter D, & K cadit; fiat  $DZ + \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK . DY$ ; & sumatur D Y adversus A.

XVII. *Ad*

Fig. 160,  
161, 162.

XVII. *Ad lentem concavo-convexam diverg.*

XVIII. *Ad lentem convexo-concavam converg.*

Si A cadat extra BC, fiat  $AB - \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$ ; sin A  
cadat inter B, & C; fiat  $AB + \frac{R}{I} AC . AB :: BC . BZ$ .

1. Jam cùm Z cadit extra D K, tum primò si  $\frac{I}{R} KZ = DZ$ , fac  
 $\frac{I}{R} KZ - DZ . DZ :: DK . DY$ , & cape DY adversus A.

2. Secundò, si  $\frac{I}{R} KZ = DZ$ ; imagò infinitè elongabitur.

3. Tertiò, si  $\frac{I}{R} KZ \neq DZ$ , fac  $DZ - \frac{I}{R} KZ . DZ :: DK .$   
DY; & fume DY versus A.

4. Sed quando Z inter D, & K cadit, fiat  $DZ + \frac{I}{R} KZ . DZ ::$   
DK . DY; & accipiatur DY versus A.

Hiscè subnectam sequentia; non contemnendum in *Engyscopiis*  
usum præ se ferentia *Problemata*.

Fig. 163.

I. *Dati puncti propinqui A perfectam imaginem per lentem concavo-convexam in aliud datum punctum Z lenti vicinè projicere.* (perfectam imaginem intelligo, quæ resultat ex omnibus, quos ipsum A diffundit, radiis in ipsa readunatis.)

Fiat  $I - R . R :: AZ . ZB$ . & dividatur ZB in C, ut sit CB.  
CZ :: I . R. tum centro C describatur circulus EBF. item centro Z  
intervallo quovis ZD (majori quam ZB) describatur circulus GDH;  
factum erit, nempe lens EFGH puncti A perfectam imaginem in  
punctum Z projiciet.

Nota, datâ CB puncta A, Z è propositis facilè determinari.

In vitro, si CB = 15, erit  $\left\{ \begin{array}{l} ZC = 9 \\ ZB = 24 \end{array} \right\}$  &  $\left\{ \begin{array}{l} AZ = 16 \\ AB = 40 \end{array} \right\}$ .

Adnotetur etiam per lentem EGHF ad Z tendentes radios ad A  
refringi.

*Hujusmodi*

*Hujusmodi Vitram Myopes juvat*; pro quibus ita construatur; sit  $ZD$  distantia, ad quam optimè cernunt; sumaturque  $ZB$  utcumque paullo minor quàm  $ZD$ ; & fiat  $CB = \frac{1}{2} ZB$ ; tum centro  $C$  per  $B$  describatur circulus  $EBF$ , & centro  $Z$  per  $D$  circulus  $G D H$  describatur; ipsi (Superficie  $G D H$  oculum admoventes) punctum  $A$  distinctè spectabunt, velut ad  $Z$  situm.

Quòd si velit *Myops*, ad distantiam itidem  $ZD$  distinctè cernens, assignatum punctum  $A$  contemplari; adsumpto, ut prius, liberè puncto  $B$ , fiat  $CB = \frac{2 AB \times ZB}{5 AB - 3 ZB}$ ; & reliqua fiant, ut prius.

II. *Dati puncti A perfectam imaginem, etiam ope lentis concave. Fig. 164.*  
*convexa, in datum aliud punctum Z longinquius projicere.*

Fiat  $AZ : AD :: I - R : R$ . item dividatur  $AD$  in  $C$ , ut sit  $CD : CA :: I : R$ ; & centro  $C$  per  $D$  describatur circulus  $EDF$ . item centro  $A$ , quopiam intervallo  $AB$  (minori quàm  $AD$ ) describatur circulus  $EDF$ ; factum erit; nempe lens  $EDF$  puncti  $A$  imaginem in punctum  $Z$  projiciet.

Datà  $CB$ , puncta  $A, Z$  vicissim è propositis innotescunt.

In vitro, si  $CB = 15$ , erit  $\begin{cases} ZC = 9. \\ ZB = 24. \end{cases}$  &  $\begin{cases} AZ = 16. \\ AB = 40. \end{cases}$

Itidem & hìc, per lentem  $EF$  versus  $Z$  tendentes radii in  $A$  refringuntur.

Hinc *Presbytis* utile conficiatur *Vitram*, hoc pacto: Ad interval- lum  $ZD$  hì distinctè videant. Secetur  $ZD$  in  $A$ , ut sit  $AD = \frac{2}{3} ZD$ . item sit  $CD = \frac{1}{3} AD$  (vel sit  $CD = \frac{1}{3} ZD$ ) centroque  $C$  per  $D$  describatur circulus  $EDF$ . item utcumque sumpto puncto  $B$  (citra  $D$  nempe, versus  $A$ ) centro  $A$  per  $B$  describatur circulus  $EBF$ . lente  $EF$  dicti *Presbyta* punctum  $A$  distinctissimè conspiciet. ||

Hiscè demum in cumulum adjiciatur ab amico communicatus *Modus elegans ac expeditus cujuscunque casus imaginem Geometricè designandi; ut & lentem describendi, quæ imaginem in datum punctum projiciet.*

### 1. *Imaginem designare.*

E centris, & verticibus circulorum lentem constituentium erigan- tur ad axin perpendiculares  $Kj, BP, DQ, CI$ ; deinde per punctum  $A$  ducatur quævis recta  $API$  secans  $BP$ , &  $CI$  in  $P$ , &  $I$ . fac  $CI : CR :: I : R$ . agatur recta  $RP$  secans  $DQ$ , &  $Kj$  in  $Q$ , &  $j$ ; fac  $Kj : Kj :: R : I$ ; & agatur  $iQ$ , quæ producta secabit axin in  $Y$ , loco imaginis quæsito. ||

Fig. 168.

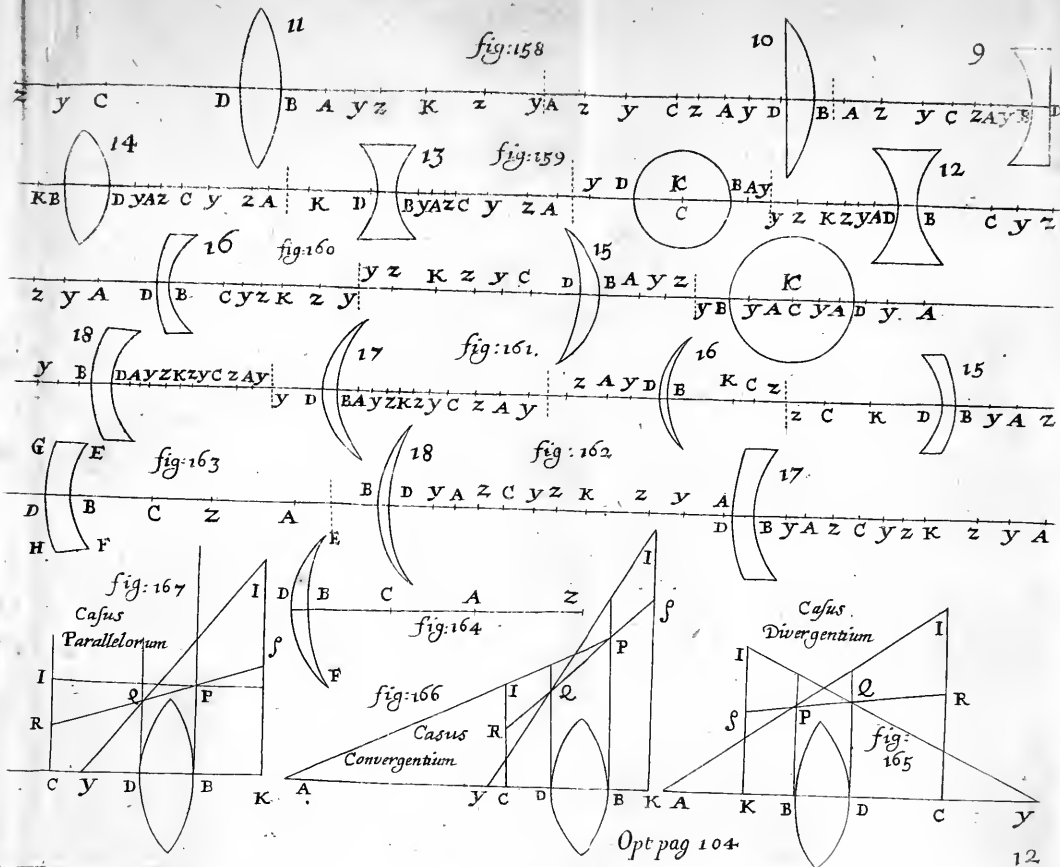
2. *Reliquis datis, lentem describere.*

Sumantur ad arbitrium  $BY$  distantia lentis ab imagine,  $BD$  crassities lentis, & alter circulorum lentem constituentium ut (in hoc exemplo) anterior  $EBF$ , cujus centum sit  $C$ ; & ad ista puncta  $B, D, C$  erigantur  $BP, DQ, CI$  ad axin perpendiculares. deinde per punctum  $A$  ducatur recta quævis  $API$  secans  $BP$ , &  $CI$  in  $P$ , &  $I$ . fiat  $CI.CR::I.R$ ; & agatur  $RP$  secans  $DQ$  in  $Q$ . fiat  $DQ.DS::I.R$ ; & agatur  $SY$  secans  $RP$  productam in  $S$ ; à quo demittatur perpendicularis  $SK$ ; & centro  $K$  intervallo  $DK$  describatur circulus  $EDF$ ; erit  $EBFD$  lens quæsitæ.

Hic autem in nimium excrefcenti spatium Lectioni defigatur limes.

## LECT. XV.

**B**Ene longo circa lucis reflectiones, quatenus hæ visum afficiunt, instituto stadio metam nunc opportunè fixuri videmur, ea quomodo-  
 docunque profecuti, quæ *παραπινεα* nobis visa, nec adeò pervulgata se objecerant. quod autem magnitudines objectas attinet (quas utique de punctis tantum radiantibus agentes omnino videamur omisisse) quales nimirum illæ ex hujusmodi radiorum inflectionibus quoad situm, figuram, quantitatem mutationes subeunt, id fermè totum passim atque fusiùs tractatum prostat, nec animus est mihi toties actum agere, vel è trivio petita quæque huc transferre. quin & eò spectantia pleraque cuncta de jam definitis ac ostensis haud difficili negotio colligi posse videntur; singulorum nempe cujusvis objecti punctorum (extremorum præsertim ac mediorum) apparentias inde determinando. verum nec ea penitus neglectui habita, ad subsequenter quoque regulam (seu monitiunculam) pressius animum advertentes forsan autumabitis. Si qualem assignata quævis superficies inflectens (simplex aut composita) magnitudinis cujusvis expositæ speciem exhibet (ampliorem nempe vel contractiorem, directam aut inversam, confusam distinctamve, seu quovis alio modo demutatam) internoscere cupiatis, id





id quadantenus hoc modo pertentantes attingetis. Oculi centrum (quale dari passim supponitur, ei saltem analogum quid dari videtur; nec indè, quoad illam quæ præ manibus rem, erroris quicquam proveniet) oculi centrum, inquam, ubicunque pro libitu constitutum ceu punctum radians concipiatur; tum ex eo duo prodeuntes radii ad propositam superficiem (eo quem hujus exigit natura vel proprietas specialis modo) inflectantur. tum inter hos inflexos collocatum intelligatur objectum; ejus certè species inter duos primos ab oculi centro procedentes radios consistet, quæ cum ipso (quoad apparentem anguli quantitatem, punctorum correspondentium positionem, & reliquas affectiones) objecto comparata voti compotes vos reddet; & id quidem perfectius, si extremorum ac mediorum præsertim objecti punctorum justas imagines, ex doctrina hætenus tradita, velitis investigare. ab apposis exemplis res manifestior evadet; in quibus notetur punctum  $O$  semper oculi centrum, rectam  $OBA$  radiationis axem (superficiebus inflectentibus perpendiculararem, & objecta in partes æquales dirimentem) denotare.

*Exemp. I. Proponatur Superficies plana medii refringentis densioris (aqua si placet, aut vitri) objectum continentis, veluti Superficies à recta  $MN$  repræsentata. & ab oculi centro  $O$  prodeant utcunque duo radii  $OM$ ,  $ON$ ; qui in  $MF$ ,  $NG$  refringantur; inter hos jam designetur objectum  $FAG$  (ab axe  $OA$  bisectum) hujus è medio  $FGMN$  spectati species (vel apparentia) alicubi consistet inter rectas  $OM$ ,  $ON$ , veluti puta ad  $\phi\alpha\gamma$ . cum autem (ut ex hujusce superficiæ natura, communique refractionum lege palam est) sit angulus  $\phi O\gamma$  major angulo  $FOG$ ; hæc objecti speciem amplificat inflectio. item cum puncta (sibi respondentia)  $F$ ,  $\phi$ ; &  $G$ ,  $\gamma$  ad easdem respectivè partes jaceant, ab eadem objecti posito non immutatur. quòd si punctorum  $\phi$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$  positio juxta superiorem doctrinam strictius exquiratur, de rotius imaginis  $\phi\alpha\gamma$  figurâ distantiaque satis accuratum feretur judicium.* Fig. 169.

*Exemp. II. Proponatur corpus densum  $PMNQ$ , Superficiebus planis parallelis ( $MN$ ,  $PQ$ ) comprehensum; & ab oculi centro  $O$  prodeuntes radii  $OM$ ,  $ON$  ad superficiem  $MN$  refringantur in  $MP$ ,  $NQ$ ; horum verò ad Superficiem  $PQ$  refracti sint  $PF$ ,  $QG$  (qui, propter incidentias (ad  $M$ ,  $P$ , &  $N$ ,  $Q$ ) pares, ipsis  $OM$ ,  $ON$  æquidistabunt) inter  $PF$ ,  $QG$  statuatur objectum  $FAG$ , cujus sit imago  $\phi\alpha\gamma$ ; tum verò manifestum est hîc se rem similiter habere ac in Exemplo præcedenti.* Fig. 170.

P

Exemp.

Fig. 171.

*Exemp. III. Proponatur circulus specularis concavus* MBN, & radiorum OM, ON reflexi sint MF, NG (se decussantes in H, & cum ipsis OM, ON concurrentes punctis X, Y) inter hos collocetur objectum FAG; ejus itidem imago rectis OM, ON interjacebit, puta ad  $\varphi\alpha\gamma$ . comparando jam angulos apparentes FOG,  $\varphi O\gamma$ , clarè vides objecti FAG speciem imminui. item cernis puncta sibi respondentia F,  $\varphi$ , & G,  $\gamma$  ad alias ac alias partes jacere, seu objecti situm hinc inverti. Quòd si intra angulum & spatium XHY statui concipiatur objectum, clarum est hinc ejus quidem speciem ampliari, sed adhuc situm inverti. sin inter ipsa XY consistat objectum, ejus itidem invertetur situs, at quantitas non immutabitur. demùm si intra angulum NHM constituitur objectum, puta RLS; cujus imago sit  $\rho\lambda\sigma$ ; evidens est hujusce speciem crescere, situmque retineri.

Fig. 172.

*Exemp. IV. Proponatur circulus specularis convexus* MBN; factisque similiter ac in eo quod immediatè præcessit omnibus; nè plura prodigam verba, vides objecti FAG speciem ( $\varphi\alpha\gamma$ ) coarctari, sed ejusce positionem eandem persistere.

Fig. 173.

*Exemp. V. Proponatur lens aliqua (exempli gratià, lens planoconvexa)* MBNQP. Radii OM, ON ad superficiem MBN refringantur in MP, NQ; tum ipsi MP, NQ ad superficiem PQ refringantur in ipsos PF, QG (se se decussantes in H, & cum ipsis OM, ON concurrentes ad X, Y) vides jam in prima figura, si objectum FAG infra XY (versus H) statuatur, ipsum ab imagine  $\varphi\alpha\gamma$  majus, quàm obtutu simplice, repræsentari. Quòd si inter ipsa puncta X, Y subintelligatur collocatum, ejus quantitas neutiquam immutabitur. at si supra XY statuatur objectum RLS, ejus species, ad  $\rho\lambda\sigma$  conspicua, diminuetur; ubique verò punctorum correspondentium positio directà permanebit.

Fig. 174.

In altera verò figura (ubi refracti PF, QG versus axem procurentes convergunt) cum objectum FAG citra punctum H sumitur, vides ejus speciem quantitate adauctam, at situ non mutatam. verùm objecti RLS ultra concursum H positi imago  $\rho\lambda\sigma$  nedum prototypo major est, at quoad situm etiam eidem in versa.

Et hoc quidem pacto nulla non lens pro varia vel objecti vel oculi positione, objecti speciem aliam exhibet ac aliam; nunc dilatat, tunc contrahit; modò rectam dat, mox inversam; subinde propius adducit, nonnunquam longius amovet. Singulos casus ad examen faciliè rediges hoc ad specimen aciem mentis intendendo.

Quinimò



Quinimò methodum hanc leviculam adhibendo plerasque superficierum quarumvis inflectentium hujus generis affectiones (illas nempe quæ magnitudinum apparentes quantitates, positiones, distantias, figuras respiciunt) compluriumque *Phænomena* causas ipse statim operâ levi deprehendes; quibus in expressius deducendis libri plures ad tantam molem extumescere vel possunt, vel solent; ut mihi saltem opus non sit hujusmodi plura congerere. veruntamen nè pars hæc nimium deficiat, & quoniam nonnulla succurrunt animadvertione non indigna, de magnitudinum etiam apparentiis, tam *Dioptricis* quàm *Catoptricis*, specialia quædam proponam; ea verò commodius sequentem præstolabuntur Lectionem.

Huic interim, nè abnormiter curta sit, aliquatenus explendæ *Problemati* hoc adnectam:

*Exponatur oculo, cujus centrum O, longinquum objectum FG, ab oculi, circuli que refringentis axe ABO bisectum; datûsque sit angulus simpliciter (oculo nempe nudo) apparens FOG. item assignetur punctum Z, quod imago sit puncti A à circulo refringente facta; datus sit denuò ex refractione apparens angulus POQ; propositum est* Fig. 175.  
*circulum istum refringentem describere (vel determinare).*

*Analysis.* Factum esto; sit nempe circulus BN, qualis requiritur, cujus sit centrum C, vertex B; & qui rectam OP in N secet. ducatur CY ad OF parallela, rectæque OP occurrens in Y, & connectatur CN. cum itaque sit NY refractus radii ad FO, vel CY paralleli; erit  $CY.YN :: R.I.$  ergò ratio CY ad YN datur; & cum prætereà angulus Y (dato FOP æqualis) detur, etiam (in triangulo CYN) angulus CNY innotescet. itaque triangulum CON specie datur; unde ratio CO ad CN (vel CB) datur. est autem  $CB.CZ :: I - R.R.$  ergò ratio CB ad CZ datur. itaque ratio CO ad CZ quoque datur; unde ratio CO ad OZ datur. verum OZ datur; ergò etiam CO datur. hinc demùm & ipsa CB datur.

Componitur autem in hunc modum. In OF utcumque capiatur  $O_s$ , & fiat  $O_s.O\sigma :: R.I.$  & connectatur  $\sigma s\zeta$ ; ducaturque ZRS ad  $\zeta\sigma$  parallela. tum fiat  $OZ.ZT :: I - R.R.$  (unde componendo  $OT.ZT :: I.R.$ ) item  $V = \sqrt{ZT \times ZS}$ ; &  $X = \sqrt{OZq - Vq}$ ; tum  $X.OZ :: OZ.Y.$  denique  $X.Y :: OZ.OC$  (unde erit  $Xq.OZq :: OZ.OC$ ; hoc est  $OZq - Vq.OZq :: OZ.OC$ ; hoc est  $OZq - ZT \times ZS.OZq :: OZ.OC$ ). per C verò ducatur CN ad ZS parallela, secans OP in N. denique centro C per N ducatur circulus BN; is proposito satisfacit.

Nam ob  $OZq - ZT \times ZS$ .  $OZq :: OZ \cdot OC$ ; erit  $OZ$  cub  $= OC \times OZq - OC \times ZT \times ZS$ . transponendóque  $OC \times ZT \times ZS = OC \times OZq - OZ$  cub. atqui propter  $OZ \cdot ZS :: OC \cdot CN$ . est  $OZ \times CN = ZS \times OC$ . quare  $OZ \times CN \times ZT = OC \times OZq - OZ$  cub; adeóque (elidendo  $OZ$ ) erit  $CN \times ZT = OC \times OZ - OZq$ . vel  $CN \cdot OC - OZ :: OZ \cdot ZT$ ; hoc est  $CB \cdot CZ :: OT \cdot ZT$ . & componendo  $BZ \cdot CZ :: OT \cdot ZT :: I \cdot R$ . itaque primò liquet punctum  $Z$  imaginem esse puncti  $A$ , ex refractione factam ad circulum  $BN$ . quinetiam ob  $CY \cdot YN :: O \cdot Os :: R \cdot I$ ; palàm est  $NO$  refractum esse radii ad  $CY$ , hoc est ad  $FO$  paralleli. liquidò proinde constat propositum. ||

In hoc casu debet esse  $OZq - ZT \times ZS$ . Haud absimili ratione quoad alios casus (ut si circuli refringentis cavum objecto exponatur, &c.) peragetur negotium. ego specimen tantum *institui Problematis*, juxta quod visibilis objecti species per refractionem circularem secundum præstitutas quantitates atque distantias utcumque possit immutari. ||

## APPENDICULA.

**U**T hæc paullo strigosior Lectio nonnihil incrassetur, faciam hic (quanquam alienore loco) quod alibi (si mihi tunc in mentem venisset) factum oportebat; ratiociniis nostris adversantem, à viro doctissimo (alioquin opinor rarò dormitante) commissum paralogismum, nè cui fraudi sit, detegam ac amoliar; unáque doctrinam nostram confirmabo. horsum è præmissis consequens, sed & experientia (ut videbimus) consonum hoc præsterno: E refractione quavis (nec non è reflectione ad circulum) duobus oculis apprehensum objectum (puta lucidum punctum  $A$ ) reverà duplum apparet, seu duas (ad minus) obtinet imagines.

Fig. 176.

Nam à puncto  $A$  exeuntes inflectenti  $MN$  incidant duo quicumque radii  $AM$ ,  $AN$ ; quorum inflexi sint  $ME$ ,  $NF$ ; concurrentes in  $X$ ; in his autem uspiam constituentur oculorum centra  $O$ ,  $P$ . quòd puncti  $A$  imago nulla ad occursum  $X$  existat, è supra positis, ac probatis confectatur (omnes enim imagines ad illa consistere docuimus inflexorum puncta, ad quæ nulli illos alii inflexi interfecant) itaque duæ sunt imagines puncti  $A$ , una in inflexo  $EM$  (qualis  $\alpha$ ) ad oculum  $O$  pertinens; altera in inflexo  $FN$  (qualis  $\alpha$ ) oculo  $P$  deputanda.

Hinc liquet etiam magnitudinis cujusvis hoc modo spectatæ duplicem imaginem haberi.

Huic

Huic effato si contraria obtendatur experientia, monstrans subinde duntaxat unam imaginem apparere; rehero, in refractione quidem ad superficiem planam apparenter hoc plerumque contingere, quoniam imagines istæ duæ (quales  $\alpha, \alpha$ ) ita sibi met ipsis, ita refractorum concursui X vicinæ sunt, ut ipsarum intervallum discerni nequeat, ipsæque (sicut in simili casu obvenire mox ostendemus) velut in unam imaginem interceptibiliter coalescant; ast in aliis diversi generis inflectionibus, etiam sensu contestante, manifestè secus apparet; id quod cum è compluribus admodum obviis experimentis constare possit, unum saltem ac alterum proponemus. Speculo B N M exponatur objectum A; tum oculis, velut ad O, P constitutis, apparebit ejusce duplex species  $\alpha, \alpha$ ; quarum illa ( $\alpha$ ) clauso oculo O, hæc ( $\alpha$ ) clauso P disparebit.

Fig. 177.  
178.

Notetur autem, si placet, imaginum  $\alpha, \alpha$  intervalla (pro vario oculorum situ) nunc magis, nunc minus deduci, sic ut subinde coadunari videantur. Nempe si oculus P ad F concipiatur translatus, ducaturque FG ipsi P O parallela, & æqualis; unde jam & oculus O in C positus concipiatur; quoniam FE minor est quam FG, radius M O per G non transibit; transeat alter inflexus LG; in hoc itaque jam consistet imago  $\alpha$ , ab altera  $\alpha$  magis elongata. Reliquarum hujusmodi diversitatum haud dispar assignari poterit ratio.

Adjungatur & hoc, an passim observatum nescio, dignum certe, quod observetur: Ad speculum concavum R S M N faciem tuam F A G (speculo propius ad motam) contemplare. Et primò quidem oculo O (altero P occluso) cernes ejus imaginem  $\varphi \alpha \gamma$ ; rursus (oculo O occluso) altero P conspicias imaginem sag, à priori  $\varphi \alpha \gamma$  aliquantum deflectentem; demùm utroque simul oculo recluso spectans illas in unam coalitas percipies; seu, speciem unam aspicias, perquam notabili discrimine, ampliorem priorum singularum alterutra.

Fig. 179.

Exhinc, obiter, suspicari licet, etiam intuitum simplicem adhibentibus objecta binis oculis spectata tantillo majora videri, quam uno; speciebus ita coeuntibus, ut non exquisitè congruant.

Unicam præterea subdemus instantiam: Per sphaeram vitream (aut si mavis, per phialam conicam aut cylindricam aquâ repletam) M B N translucentem lucernulæ flammam A specta; ejus duas imagines  $\alpha, \alpha$  observabis (pro oculorum situ magis à se minúsve diffitas) quarum una ( $\alpha$ ) clauso oculo O, altera ( $\alpha$ ) clauso P evanescet.

Fig. 180.

Viderur hæc instantia vel sola sufficere vulgari sententiæ refellendæ; juxta quam (ut Keplerus alicubi colligit) puncti A simplex imago ad punctum X consisteret.

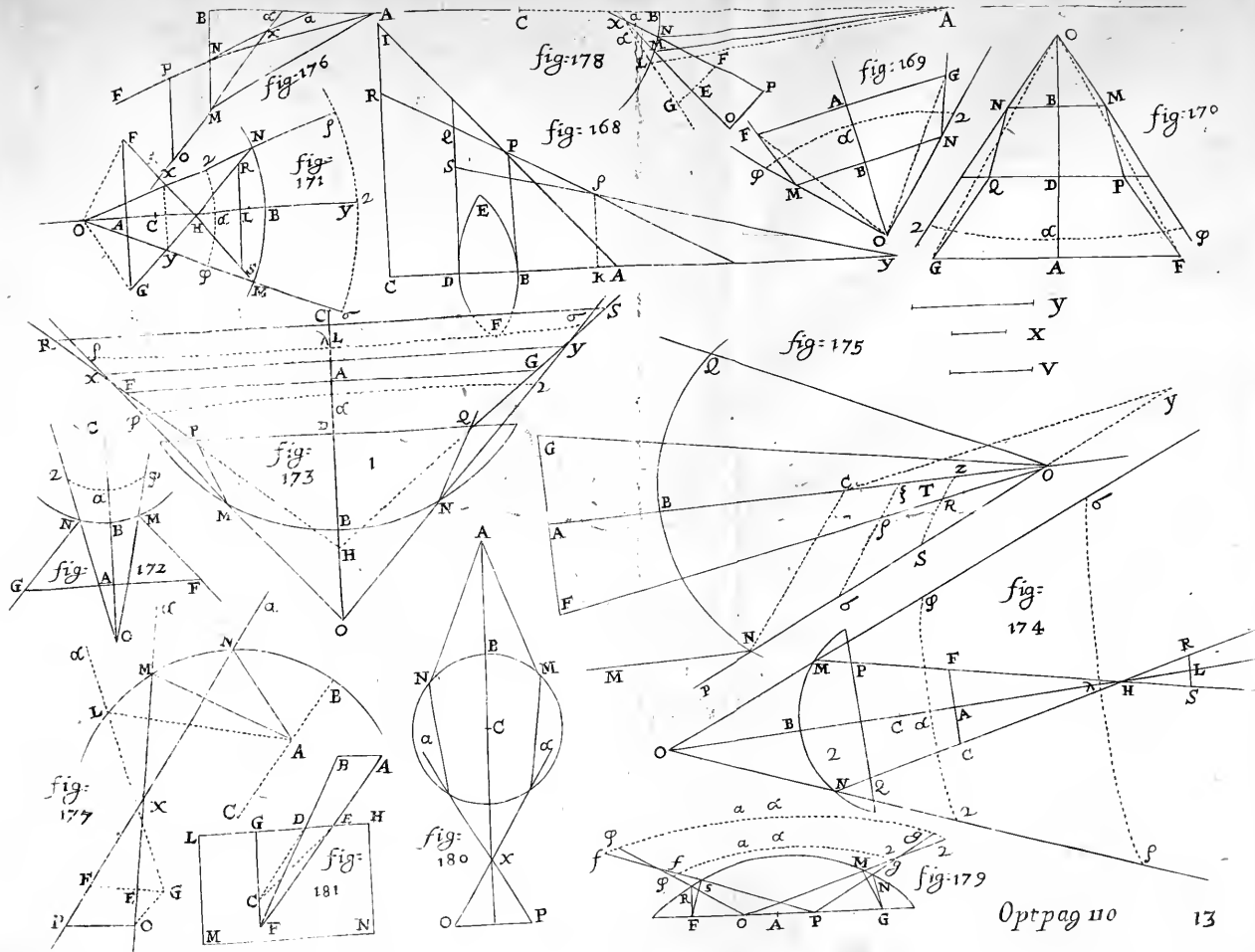
Paralipom. pag. 178.

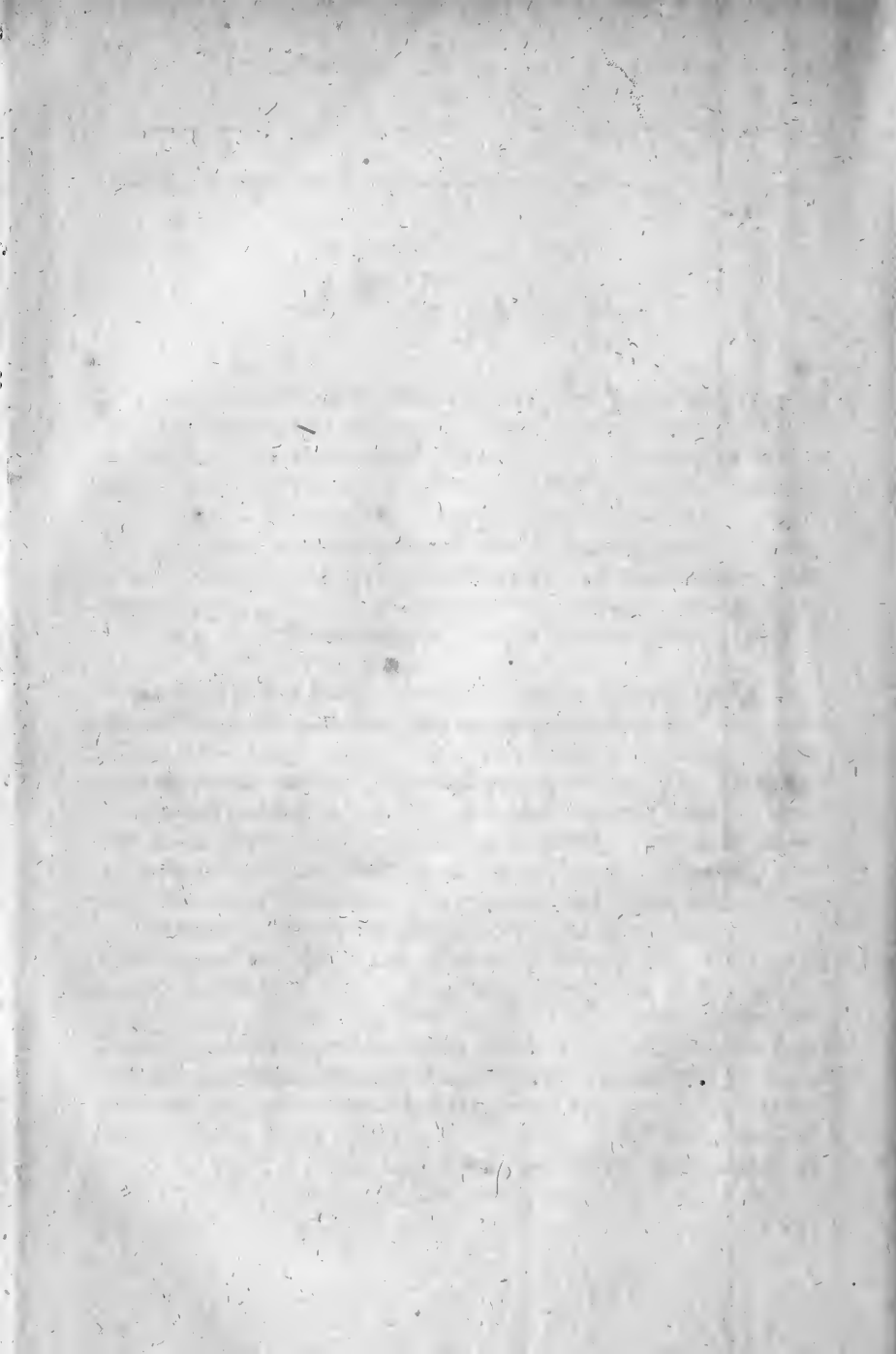
Has instantias, facilitatis gratiâ, ita proposuimus, quasi punctum A, unâ cum duobus oculis O, P in plano existeret ad superficiem inflectentem recto. id quod utrum in experiendo præcisè contingat necne, parum refert; duas utcumque species apparere liquet. quin facillè concipitur etiam eo posito rem non aliter se habituram.

His prælibatis, illud discutiamus, quod innuimus,  $\psi\epsilon\upsilon\delta\eta\gamma\delta\epsilon\phi\eta\mu\alpha$ ; quo nempe P. Herigonius propositionem hanc suam comprobatur it: "Si oculus, & aspectabile sint in diversis mediis se mutuo contingentibus, imago apparebit in concursu catheti, & radii ab oculo per punctum refractionis directè producti.

Sit utique punctum F in medio densiori H L M N collocatum, quod ad oculos A, B radios F E A, F D B emittat refractos ad E, & D; & rectæ A E, B D convenient in C; sit autem superficiæ refringenti perpendicularis recta F G; erit (inquit) puncti F imago in recta F G. id quod ita demonstrat: Quoniam dicta imago tam in refracto A E, quàm in refracto B D existit, ergò in horum intersectione C existet. verùm intersectio C in recta F G existet; quoniam hæc communis est sectio planorum A E F, B D F superficiæ refringenti rectorum. ergò liquet propositum.

In hanc demonstrationem adverto; 1. Supponit ea refractos A E, B D concurrere; quod tamen falsum est, præterquam in uno vel altero casu; quum nempe planum A B F in eodem existit cum ipsa recta F G plano; vel, cum puncta A, B sunt in superficie conii recti, cujus axis est recta F G. quod si prior casus ponatur, è suprâ demonstratis manifestum est refractos A E, B D non in recta F G, sed intra angulum F G H convenire; quod è principiis nostris elicitum illum saltem constringere debet, qui principia ista admittit ac amplectitur. 2. Hinc, illa demonstratio ipsam se perimit: Nam, quoniam (in posito casu) puncti F imago tam in recta A E, quàm in recta B D existit, adeoque in harum concursu; concursus autem iste non est in recta F G; ergò liquet dictam imaginem extra rectam F G versari. 3. Supponit iste discursus (ut & suppar ille jamjam prolatus) puncti F unicum oculo utrique imaginem apparere; quod  $\omega\epsilon\tilde{\omega}\tau\omega\gamma\ \psi\epsilon\upsilon\delta\eta\gamma\delta\epsilon\phi\eta\mu\alpha$  erat, à nobis paullo supra refutatum. Enimverò diversi oculi sunt reipsâ diversi spectatores. hæc, opiaor, ratiocinium illud satis enervant. ||





## LECT. XVI.

I. **P**unctorum ex inflectione determinatis apparentibus locis, con-  
 quiescere possem; siquidem exinde magnitudinum apparentiæ  
 deducuntur, quotlibet in ipsis existentium punctorum imagines de-  
 signando. ceterum nè justo parcius in hac parte, vel iliberalius egisse  
 videar, etiam de *rectarum linearum* (consequenter & *planarum super-*  
*ficierum*, quibus distinctè visui representandis natura præcipuè consu-  
 luisse videtur) *apparentiis & imaginibus expressiora* (specimina quædam  
 haud gravabor adnectere. de quibus etiam circa reliquarum magnitu-  
 dinum apparentias propius ac promptius fiat iudicium.

II. Noretur autem imprimis; Sicuti (quod sæpius in antedictis  
 habetur insinuatum) cuiusque puncti quodammodo duplex est imago;  
 una simplex, absoluta, principalis; illa scilicet, quæ in recta versatur  
 ad superficiem inflectentem perpendiculari, perque radians punctum  
 simul ac oculi centrum transeunte (hoc est in communi lucidæ radi-  
 tionis, superficiæ reflectentis, ipsiusque visionis axe) altera verò  
 relata, mutabilis, ac minùs præcipua; quæ talis est respectu oculi  
 extra rectam inflectenti superficiæ perpendicularem arbitrariè consti-  
 tuti; ità pari fermè modo duplex cuiusque magnitudinis imago con-  
 cipi potest una quidem absoluta (quam saltem hoc nomine desig-  
 nabo) quæ ex punctorum singulorum in ipsa existentium absolutis  
 imaginibus quasi conflatur, illas saltem comprehendit (qualis in ob-  
 jecta congrua superficie vividè deformaretur; qualisque videretur  
 oculo ad infinitam ab inflectente superficie distantiam-rirè collocato)  
 altera verò relata, quæ oculum respicit ubivis in certa positione con-  
 stitutum; quid velim, & quare sic distinguam ab exemplis benè mul-  
 tis in decursu proponendis luculenter apparebit.

Fig. 182.

III. *Superficiem planam media dirimentem (aquam si placet ac aërem)* repræsentet recta  $PQ$ , & aquæ insit recta  $FP$  ad  $PQ$  perpendicularis. fiat autem  $FP : XP :: R : I$ ; erit  $XP$  imago absoluta rectæ  $FP$ ; continet illa scilicet omnes locos punctorum, quæ in  $FP$ , oculo apparentes in ipsa  $FP$  sito. verum si ponatur oculus uspiam extra  $FP$ , velut ad  $O$ , ei tota  $FP$  citra  $XP$  apparebit. transeat videlicet aliqujus radii  $FM$  refractus per  $O$ , & protrahatur  $OM$ , ut occurrat ipsi  $FP$  in  $K$ . est ergo (secundum præmonstrata) punctum  $K$  inter  $X$ , &  $P$ . itidem (è prius ostensis) puncti  $F$  imago quæ in refracto  $OMK$ , ad oculum  $O$  relata, inter  $K$ , &  $M$  cadit, veluti puta ad  $\phi$ . simili ratione cujusvis alterius in ipsa  $FP$  accepti puncti, ceu  $R$ , imago (cogita) citra rectam  $XP$ , versus oculum, jacet. totius itaque rectæ  $FP$  imago talis est, qualem curva linea  $\phi \circ P$  refert. quod si  $P$  infinite protrahatur, ejus totius imago  $P \circ$  versus asymptoton  $OBA$ , ad  $PF$  parallelam, accedens excurrit.

IV. *Delineatur autem curva  $P \circ$  hoc modo.* ab  $O$  ducatur utcunque recta  $OMK$  secans rectam  $PQ$  in  $M$ ; & (posito fore  $S = \sqrt{Rq} - Iq$ ) sit  $PH = \frac{Sq \times PM \text{ cub}}{Iq \times FPq}$ ; atque per  $H$  ducatur  $H\phi$  ad  $PR$  parallela, ipsi  $OK$  occurrens in  $\phi$ ; erit  $\phi$  in dicta linea; nempe, si  $OMK$  ipsius  $MF$  refractus concipiatur, erit punctum  $\phi$  ipsius  $F$  imago. eodem modo reliqua lineæ  $P \circ$  puncta designantur.

Fig. 182.

V. Quinetiam adsumptâ rectâ  $FG$  ad  $PQ$  parallelâ, ductâque  $GQ$  ad  $FP$  (vel  $ABO$ ) parallelâ; item per  $X$  ductâ  $X\alpha Y$  ad  $PQ$  parallelâ, erit quidem recta  $X\alpha Y$  rectæ  $FAG$  imago absoluta; verum ejus imago ad oculum  $O$  relata citra rectam  $XY$  tota jacet, eamque curva  $\phi \alpha \gamma$  repræsentat, admodum jamjam præscriptum punctatim delineabilis. itaque compositæ lineæ  $PFGQ$ , circa axem  $OBA$  rotatæ, imago fornicem referet arcuatam. id quod experiri vos velim vasculi cylindrici aquâ repleti superficiem inspectando.

Fig. 183.

VI. Quod si recta visibilis  $FG$  ad  $PQ$  inclinata sit, cum ea conueniens in  $V$ ; & connectatur  $XV$ , erit rursus  $XY$  ipsius  $FG$  imago absoluta; relatum verò curva  $\phi \alpha \gamma$  repræsentat.

Fig. 184.

VII. Quod si vicissim oculus  $O$  in aqua ponatur constitutus, & ab inde respiciatur recta  $PF$  in aëre posita, fiatque rursus  $PF : PX :: R : I$ ;



R. I; erit quidem  $XP$  imago rectæ  $FP$  absoluta; at ejusdem imago relata (puta  $P\varphi\varphi$ ) ultra  $PF$   $R$  jacet, ab illa sensim reclinans; ejusque puncta quælibet ita signantur. Ab  $O$  ducatur recta  $OK$  utcumque rectam  $PQ$  secans in  $M$ , & sit  $KM$  ipsius  $FM$  refractus, tum (posito rursus  $S = \sqrt{Iq - Rq}$ ) fiat  $PH = \frac{Sq \times PMq}{Iq \times PFq} P M$ , & per  $H$  ad  $PF$  parallela ducatur  $H\varphi$ , ipsam  $OMK$  interfecans ad  $\varphi$ ; erit punctum  $\varphi$  in dicta linea, punctum scilicet  $F$  representans. eodemque modo puncta quotlibet alia deprehendes.

VIII. Similiter rectæ  $FG$  ad ipsam  $PQ$  parallelæ, vel inclinatæ imago relata  $\varphi\alpha\gamma$  (in partes arcuata contrarias illis, ad quas prioris. casus imago videbatur incurvata) determinabitur. rem apposita figura fatis exprimit.

Hæc autem omnia de suprâ comprobatis dilucidè confectantur.

IX. Ac ita quidem circa simplices planas superficies refringentes Fig. 185. sese res habet. Quòd si corpori parallelis planis  $MN$ ,  $\mu\nu$  terminato exponatur recta  $FG$ ; Sint rectæ  $FP$ ,  $GQ$ ,  $ADBO$  ipsi  $PQ$  perpendiculares, & fiat  $BD.BS::I.R$ ; adsumaturque  $A\alpha=DS$ ; & fiat  $AB.A\alpha::FP.XP$ ; & per  $X$ ,  $\alpha$  ducatur recta  $X\alpha Y$ , erit  $X\alpha Y$  lineæ  $FAG$  imago absoluta. Ergò ejus imago ad oculum  $O$  relata (in hoc casu) citra ipsam  $X\alpha Y$  versus superficiem  $\mu\nu$  nonnihil incurvata disponetur, qualem exhibet linea  $\varphi\alpha\gamma$ . id quod ex eo satis videtur liquere, quòd recta  $X\alpha Y$  sit imago respectu oculi in ipsa  $OB$  à  $B$  infinite femoti. designari verò poterit hæc imago ad hunc modum. sit  $fag$  (minusculis elementis indigitata) imago rectæ  $FAG$  ad superficiem refringentem  $\mu\nu$  relata (hoc est ad oculos in refractis  $f\mu M$ ,  $q\nu N$ , a  $DB$ , reliquisque, nec non in medio  $\mu\nu MN$  versus  $O$  protenso, sitos) juxta proximè commonstrata delineabilis. tum hujus ipsius  $fag$  velut in medio  $MN\mu\nu$  versus  $A$  protenso positæ, ex refractione ad superficiem  $MN$  emergens, & ad oculum  $O$  relata construat imago  $\varphi\alpha\gamma$  (itidem ad modum nuperrimè præscriptum) hæc rectam  $FAG$  per corpus  $MN\mu\nu$  spectatam representabit. experientia testis advocetur, ego pluribus in re perplexiore, quam utiliore supersedeo.

X. Porro quod *plana specula* (simplicia, vel composita) attinet, in iis palàm est imagines absolutas ac relatas omnino sibi coincidere; quo fit, ut ex objectorum magnitudines, figuras, distantias (situ

Q

tamen

tamen nonnunquam in verso) quàm exactissimè referant. qua de re (tam facili, toties acta) penitus reticens ad minùs trita me promoveo.

Fig. 186.

XI. Sit jam *Circulare Speculum convexum* DMB, cujus centrum C; & per C protendatur recta CBA, in qua sumatur portio quædam AR, fiatque CA.AB::CX.XB; neq; non CR.RB::CY.YB; erit YX imago absoluta rectæ RA; quod si CB bifecetur in Z; erit BZ totius BA ad infinitum exporrectæ imago absoluta; hoc est, illæ tales erunt oculi respectu in ipsa AB constituti. secùs autem uspiam collocato oculo, tanquam ad O, totius AB quod conspicuum est (hoc est quod supra horizontem OT, speculo contiguum extat) supra citràque XB apparebit. Enimvero transeat radii AM reflexus KMO per O; itaque punctum K (quod olim ostensum) supra punctum X, versus A, extat. quinetiam (ex indidem monstratis) puncti A imagines omnes, oculum O respicientes, ex reflexione factæ ad partes BMD, citra CA versus O, cadunt. ejus igitur imago quæ in OK, puta  $\alpha$ , in ipsa KM existet (id quod etiam, nè quis dubitet, exertius mox ostendemus). simili ratione puncti R imago, cogita, supra Y, citràque BY jacet. quod si porrò per O transeat recta ODLH, quæ reflexa sit rectæ DS ad CA parallelæ (hæc autem quomodo ducatur, antehac declaratum habetur) erit in ODL imago puncti (quale concipiatur S) in ipsa AB infinitè semoti; hæc puta sit ad  $\sigma$ . erit itaque curva B $\alpha\sigma$  imago totius infinitæ rectæ BAS, ad oculum O relata.

XII. Ista verò linea tali pacto delineatur: Super diametrum CO describatur circulus OTC; & ab O ducatur recta quæpiam OMF, cujus reflexa sit MA, in qua sumatur ME = MF; tum secetur FM in  $\alpha$ , ut sit F $\alpha$ . $\alpha$ M::AE.AM; erit (è pridem monstratis) punctum  $\alpha$  puncti A imago. simili modo quotcunque lineæ B $\alpha\sigma$  puncta reperiuntur.

XIII. Quòd autem sit punctum  $\alpha$  citra K (versus oculum) ità constabit. Ducatur FQ ad AM parallela. est ergo angulus FQA par angulo CAM. at angulus FCA angulo ACE minor est. ergo est CF. FQ < CE. AE. atqui CF = CE; quare FQ > AE. ergo est FQ.AM > AE.AM. hoc est FK.KM > F $\alpha$ . $\alpha$ M. componendoque FM.KM > FM. $\alpha$ M. unde KM <  $\alpha$ M. adeoque punctum  $\alpha$  citra K versus O jacet: Q.E.D.

XIV. Exhinc

XIV. Exhinc *Euclidis*, *Alhazeni*, communisque fermè sententia convellitur, quæ rectæ  $BA$  rectam  $BK$ , infinitæque  $BS$  ipsam  $BL$  imagines statuit; proindeque corruunt omnia, quæ principio superextruunt isti gratis adsumpto, rationique dissentaneo. Veruntamen *Opticorum novissimus scriptor, eruditissimusque vir*, veterum ipse vestigiis insistens postulatam istud ab experientia stabilitum vult, ejusque veritatem sese deprædicat centies explorâsse; doctrinam itaque nostram invicto sensus testimonio refutavit. atqui repono, non potuisse illum quantumvis oculatum & sagacem quod obtendit vel semel explorare. nec hoc in casu poterit doctrina nostra tentari, nedum refelli. nam (præterquam quod perpendicularis  $CBA$  situm exactè dignoscere perquam arduum, forsan impossibile fuerit) quum lineola  $B\alpha\sigma$  infinitam, juxta nos, lineam rectam  $BS$  repræsentet, ipsamque punctum  $\sigma$  (infinitè distito puncto  $S$  respondens, atque rectam  $DH$  bisecans) à puncto  $L$  modicè distet, quæ amabò visus acies curvæ  $B\alpha\sigma$  à recta  $BL$  deflectionem cernat? itaque frustrâ esse videtur acutissimus vir, ad testem provocans hac in parte minùs competentem, deque cujus sententia vix ullatenus constare possit. Sanè quoad affinem in *Dioptricis* casum, quem attingimus supra, demisso in aquam perpendiculo, oculo simpliciter inspectanti, videbitur ejus imago nihil quicquam à perpendiculari declinans; verum ope reflectionis justum perpendicularis situm observando (qui nudo scilicet obtutu planè dijudicari nequit) notoriè deprehenditur aquæ immersi perpendiculi imago ab ipso deviare. neque dubito quin pariter in præsentè casu ritè consulta experientia pro nobis sit pronunciatura. Quinimò nostris ex effatis (luculentâ opinor ratione suffultis) apparebit, unde principium illud multis in casibus experientiæ videatur consentire; quoniam nempe contingit, ut in iis à vero non multum abscedat; ejusque proinde falsitatem sensus (nisi ratione, vel certiore sensu adjuncto) perspicere nequeat. ast exorbito.

XV. Sit rursus *Speculum concavum*  $BMD$ ; cujus centrum  $C$ , & per  $C$  extendatur infinita recta  $CB L$ , biseceturque semidiameter  $CB$  in  $Z$ ; ac in  $ZB$  sumptis quibuscunque punctis  $A, R$ ; fiat  $CA$ .  $AB :: CX$ .  $XB$ ; itémque  $CR$ .  $RB :: CY$ .  $YB$ ; erit quidem infinita  $BL$  totius  $BZ$  imago absoluta, & portio  $YX$  portionis  $RA$ ; verum extra axem  $BC$  uspiam constituto visu, velut ad  $O$ , ad hunc relatæ ipsius  $ZB$ , ejusque partium imagines ita determinantur.

Fig. 187.

Fig. 187.

XVI. Ad diametrum CO describatur circulus CFH; & ab O radius incidat talis, ut cum ejus reflexus sit DS, contingat fore  $DS = \frac{1}{2} DH$ , vel  $\frac{1}{2} DI$ ; positâ CI ad DS perpendiculari (talis autem radius facillè duci posse concipiatur; & per curvam appropriatam reverâ statim determinetur; id proinde nos non distinebit). Erit tum puncti S imago, puta  $\sigma$ , à puncto D infinitè disjuncta; quoniam (id quod fieri nequit, nisi  $H\sigma$ ,  $\sigma D$ , sint infinitæ) est  $H\sigma \cdot \sigma D :: IS \cdot SD$ . Jam in arcum DB cadat utcumque radius OM, cujus reflexus sit MAE; & in hac sumatur ME = MF; tum in OM producta capiatur punctum  $\alpha$ , ut sit  $F\alpha \cdot \alpha M :: EA \cdot AM$ ; erit  $\alpha$  puncti A imago. simili methodo reperiatur; puncti R imago; neque non reliqua totius B $\sigma$  $\alpha$  $\sigma$ , ipsam BS referentis, puncta.

Fig. 187,  
L. 38.

XVII. In hac verò constructionem quædam veniunt adnotanda.

1. Quòd  $CS \sqsubset CZ$ . Nam  $4 CZq = CBq = 3 SDq + CSq$ , ergò quum sit  $CZ \sqsubset SD$ ; erit  $CS \sqsubset CZ$ .
2. Quòd  $CA \sqsubset CS$ . Nam (è suprâ monstratis) si ducatur recta  $M\psi$  ad DO parallela, ejusce reflexa (puta  $M\xi$ ) secabit ipsam DS, versus I, puta ad  $\xi$ . ergò  $M\xi$  ipsam CB secabit supra punctum S; velut ad  $\phi$ . atqui quoniam ang.  $CMO \sqsubset CM\psi$ , seu ang.  $CM A \sqsubset CM\phi$ , est  $CA \sqsubset C\phi$ ; adeoque magis est  $CA \sqsubset CS$ .
3. Quòd  $EA \sqsubset AM$ . cum enim sit EM (vel FM)  $\sqsubset HD$ ; atque  $DS \sqsubset MA$ ; erit  $EM \cdot MA \sqsubset FD \cdot DS :: 2 \cdot 1$ .
4. Hinc denuò liquebit totam lineam B $\sigma$  $\alpha$  $\sigma$  ultra rectam CBL jacere. nam ducatur FQ ad AM parallela est hîc ang  $FCA \sqsubset$  ang  $ACE$  & ang  $FQA =$  ang  $CAE$ . quapropter erit  $CF \cdot FQ \sqsubset CE \cdot AE$ . adeoque  $FQ \sqsubset AE$ . ac inde  $FQ \cdot AM \sqsubset AE \cdot AM$ ; hoc est  $FK \cdot KM \sqsubset F\alpha \cdot \alpha M$ . dividendoque  $FM \cdot KM \sqsubset FM \cdot \alpha M$ . quare  $\alpha M \sqsubset KM$ . adeoque punctum  $\alpha$  ultra K in recta OK protensa jacet.

XVIII. Quòd si ad partes alteras rectæ OD ducatur radius ON<sup>o</sup> cujus reflexus NGT = NV; sitque T.G. GN  $\sqsubset 2 \cdot 1$ ; statuentur puncti G imago (puta  $\gamma$ ) ad partes O. quinimò cum in hanc rem plura subjici possent, ego jam *Specimina* tantum instituens (quippe cum operâ dignum haud arbitrer adeò tenuem materiam curiosius prosequi) à minutis abstineo. quò & inde prior sum, quoniam in hac re copiosus videtur A. Tacquetus; subinde quidem is, ob admissum istud falsum principium, cespitans, at bene multa credo fugge-

fuggerens haud aspernanda . relinquantur igitur ei cætera , mihi suffecerit , quòd veriore *Phænomena* detegendi declarandique methodum adnissus sim aliquatenus enucleare . pergamus ad alios casus , haud ita pertractatos .

XIX Objiciatur speculo  $MBND$  recta  $FAG$ , rectæ  $CA$  (per speculi centrum  $C$  transeunti) perpendicularis ; adverto, si fuerit ipsa  $CA$  major quam  $CZ$ , quadrans diametri  $BD$ , quòd rectæ  $FAG$  ad infinitum utrinque protrahæ ad totum circulum (ejus ad partes intelligo concavas simul ac convexas) imago absoluta (quinetiam imago ad oculum in ipso centro  $C$  constitutum relata) erit *Ellipsis*. item si  $CA$  minor sit, quàm  $CZ$ , quòd ipsius  $FAG$  imago absoluta (vel dicto modo relata) constabit ex hyperbolis oppositis ; si denuò  $CA$  ipsam  $CZ$  adæquet (vel  $FG$  per ipsum  $Z$  transeat) quòd ad parabolam ejusmodi consistet imago. Sed modum transgrederer hæc jam aggrediens demonstrare. Expectent igitur. ||.

Fig. 189.

## LECT. XVII.

I. AD ea, quæ sub finitam præcedentem proposuimus demonstranda necessariam, alioquin notabilem, *Conicarum Sectionum proprietatem* imprimis ostendemus.

Sit triangulum  $ACE$ , rectum habens angulum ad  $C$ ; & inde finitè protractis lateribus  $AC$ ,  $AE$ , in  $AC$  sumatur quòd piam punctum  $X$ , ducaturque  $XG$  ad  $CE$  parallela; inferatur autem angulo  $CXG$  recta  $CZ$  æqualis ipsi  $XG$ ; dico punctum indeterminatum  $Z$  ad sectionum conicarum aliquam consistere.

Fig. 190.

II. Nempe primò, sit angulus  $A$  semirecto minor (vel  $ACE$ ) erit punctum  $Z$  ad ellipsin, quæ determinatur hoc pacto: Anguli  $LC P$  semirecti fiant (ad utramque rectæ  $CE$  partem) liquet igitur rectas  $CP$  ipsi  $AE$  occurrere, puta ad puncta  $R$ , &  $S$ . ab his  
ad..

ad ipsam  $E C$  parallelæ ducantur rectæ  $R T$ ,  $S V$ ; palam est indeterminatum punctum  $X$  inter limites  $T$ ,  $V$  consistere (nam extra  $T V$  punctum quodlibet  $L$  accipiendo, & inde ducendo  $L I P$  ad  $C E$  parallelam, erit  $C L$ , hoc est  $L P$ , major quam  $L I$ , unde à  $C$  ad rectam  $L I$ , nulla duci recta potest æqualis ipsi  $L I$ ). Jam autem dico, quòd punctum  $Z$  ad ellipsin existit, cujus axis  $T V$ , focus  $C$ . Nam biseccetur  $T V$  in  $K$ ; fiat  $V D = T C$ ; ducatur  $K H$  ad  $C E$  parallela; per  $H$  ducatur  $H N$  ad  $C K$  parallela. Estque  $K H = \frac{T R + V S}{2} =$

$$\frac{C T + C V}{2} = K T = K V. \quad \text{Et quoniam } A V . A T :: (V S .$$

$T R$  (hoc est)  $:: C V . C T ::$ )  $C V . D V$ ; erit per rationis conversionem  $A V . T V :: C V . C D$ . vel, consequentes subduplando,  $A V . K V :: C V . C K$ . dividendoque  $A K . K V :: K V . C K$ ; hoc est  $A K . K H :: K H . C K$ . hoc est  $H N . N G :: K H . C K$ . quare  $K H \times N G = C K \times H N = C K \times K X$ . atqui est  $C Z q = X G q = K H q + N G q + 2 K H \times N G$ . &  $C X q = C K q + K X q + 2 C K \times K X = C K q + K X q + 2 K H \times N G$ . ergò  $K H q + N G q - C K q - K X q = C Z q - C X q = X Z q$ . Ad alteras bisegmenti  $K$  partes sumatur  $K \xi = K X$ , ducaturque  $\xi v$  ad  $K H$  parallela, secans curvam  $T E Z V$  in  $\zeta$ , & rectam  $A H$  in  $v$ , ac ipsam  $N H$  in  $v$ ; erit quoque, simili ex discursu,  $\xi \zeta q = K H q + v \gamma q - C K q - K \xi q$ ; unde liquet fore  $\xi \zeta = X Z$ ; connexisque proinde rectis  $C \zeta, D \zeta$ , erit  $D \zeta = C Z$ ; &  $C \zeta + C Z = \xi \gamma + X G = 2 K H = T V$ . ergò  $C \zeta + D \zeta$  (vel  $D Z + C Z) = T V$ . unde perspicitur curvam  $T \zeta Z V$  esse ellipsin, cujus axis  $T V$ ; foci  $C, D$ .

Fig. 191.

III. Sit autem secundo angulus  $C A E$  major semirecto (vel  $A C \supset C E$ ) dico punctum  $Z$  ad oppositas hyperbolas, consimili modo determinabiles, existere. enimverò factis (ad utramque rectæ  $C A$  partem) angulis semirectis  $A C P$ ; & (ab ipsarum  $C P$  cum  $A E$  occurribus) ductis rectis  $R T, S V$  ad  $C E$  parallelis, punctum  $X$  extra limites  $T V$  necessario consistet (etenim ubivis intra  $T V$  ducta  $L I P$  ad  $C E$  parallelâ, erit  $L I \supset L P$ , ideoque nulla par ipsi  $L I$  angulo  $A L I$  subtendi potest; id quod extra terminos hosce nil prohibet fieri) erit jam  $T V$  axis, &  $C$  focus hyperbolarum. Fiant enim omnia, quæ in casu præcedente, eritque rursus hic  $K H = K V$ . item ob  $A V . A T :: C V . D V$ ; & (inversè componendo)  $A V .$

AV.TV::CV.CD; & consequentes subduplando, dividendó-  
que AK.KV::KV.KD::KV.CK. vel AK.KH::KH.CK;  
hoc est HN (KX). NG::KH.CK; quare CK×KX=KH  
×NG. est autem XZq=CZq—CXq=XGq—CXq=  
NGq—KHq—2NG×KH:—KXq—CKq—2CK  
×KX=NGq—KHq—KXq—CKq. Sumatur Kξ=KX,  
discursúmque similem adhibendo liquebit fore ξζ=XZ; & ideo  
Dζ=CZ. unde Cζ—Dζ (DZ—CZ)=Cζ—CZ=  
ξγ—XG=2KH=TV. quare manifestum est *curvas* TZ,  
Vζ esse *Hyperbolas*, quarum axis TV, foci C, D.

IV. Terriò demùm, sit angulus CAE semirectus (vel CA=CE) erit tum punctum Z ad parabolam; quæ iidem ita determina-  
tur. Fiat angulus ACP semirectus, & ab ipsarum AE, CP in-  
tersectione R ducatur RT ad CE parallela; erit T *Vertex*, atque C  
*Focus Parabola*. id quod ex bene nota sectionis hujus proprietate con-  
stat; qua scilicet est TA=TR=TC (ob angulos TAR,  
TCR semirectos) & AX=XG=CZ.

V. Manifestum est verò rectam AE sectiones has ad E contingere.  
quia nempe perpetuò major est CZ (vel XG) ordinatâ XZ; adeó-  
que puncta G extra curvas unaquæque jacent hoc est tota AG extra  
illas cadit.

VI. Hisce præstratis: *Esto Circulare Speculum* MBND, cen- Fig: 193.  
trum habens C; cui exponatur recta quæpiam FAG; & huic per-  
pendicularis sit recta Ca; quam ad partes averfas sumpta CA, ad-  
æquet. Sit etiam CE ad CA perpendicularis, ac æqualis qua-  
dranti diametri BD; connexâque recta AE producat utrunque.  
sumpto jam in recta FAG puncto quolibet F, connectatur FC, &  
radiationis ab F in ipsa FC limes, seu *focus*, sit Z; ac per Z du-  
catur ZX ad AC perpendicularis, ipsi AE occurrens in H; dico  
fore XH parem ipsi CZ.

Nam (è jam antè monstratis) est FC.CZ::FM.MZ (hoc est)  
::FC—CB.CB—CZ. hinc erit aC.CX (AC.CX)::  
FC—CB.CB—CZ. quare (ducendo in se extrema, ac media)  
erit AC×CB—AC×CZ=CX×FC—CX×CB. hoc  
est (ipsi CX×FC substituendo AC×CZ, propter aC.CX::  
FC.CZ) erit AC×CB—AC×CZ=AC×CZ—CX×  
CB. transponendóque AC×CB+CX×CB=2AC×CZ.  
hoc

hoc est  $AX \times CB = 2 AC \times CZ$ ; vel  $2 AX \times CE = 2 AC \times CZ$ ; unde  $AX . AC :: CZ . CE$ ; hoc est  $XH . CE :: CZ . CE$ . quapropter est  $XH = CZ$ : Quod E. D.

Quoad radiationem ad partes concavas, planè similis est discursus. examinetis ipsi, peto.

Fig. 193,  
194, 195.

VII. Exhinc evidenter liquet, si fuerit  $CA \sqsubset CE$ ; quòd omnes punctorum  $F$  limites, seu foci (quales  $Z$ ) ad ellipsin existunt; cujus focus  $C$ , & cujus axis  $TV$  è præmissis, non uno modo, determinatur. item si  $CA = CE$ , limites  $Z$  ad parabolam consistent cujus focus  $C$ , axis  $CT = \frac{1}{2} CE$ , vertex  $T$ . denuò, si  $CA \supset CB$ , puncta  $Z$  ad hyperbolas esse constat, quarum itidem focus  $C$ ; & axis  $TV$  facile de modò (vel alibi) diſis reperitur; cunctarum verò sectionum Parameter ipsi  $CB$  æquatur.

VIII. Hinc in singulis respectivè casibus, ejusmodi sectiones conicae sunt rectarum  $FaG$  absolutæ imagines; quin & eadem veræ sunt imagines ad oculum relatæ in speculi centro constitutum; ex reflectione scilicet ad concavas speculi partes effectæ; quæ solæ oculo sic posito conspicuæ sunt.

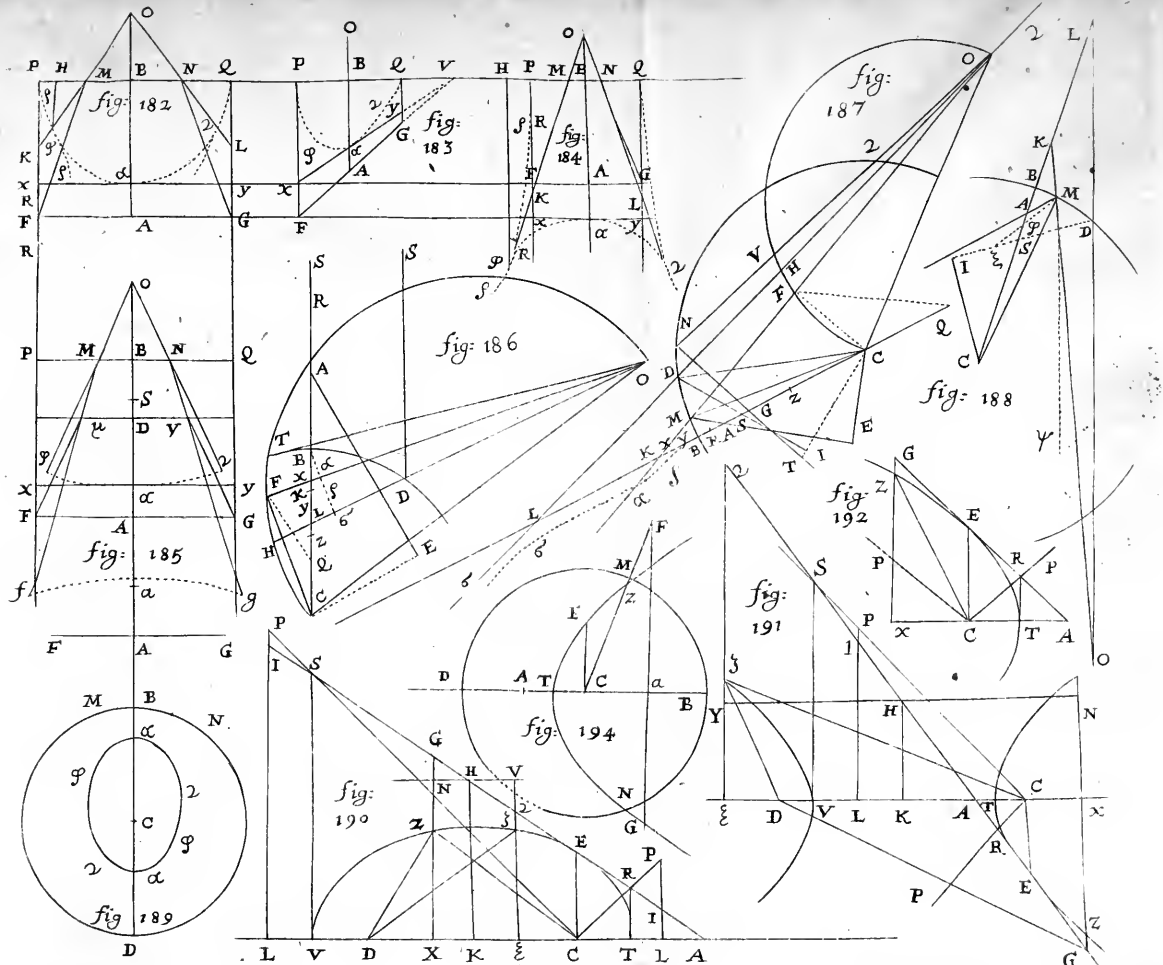
IX. Patet autem si recta  $FaG$  infinitè distet, quòd ellipsis in circulum abit. uti quoque si  $FaG$  per centrum transeat, quòd hyperbolæ istæ in rectam lineam degenerant.

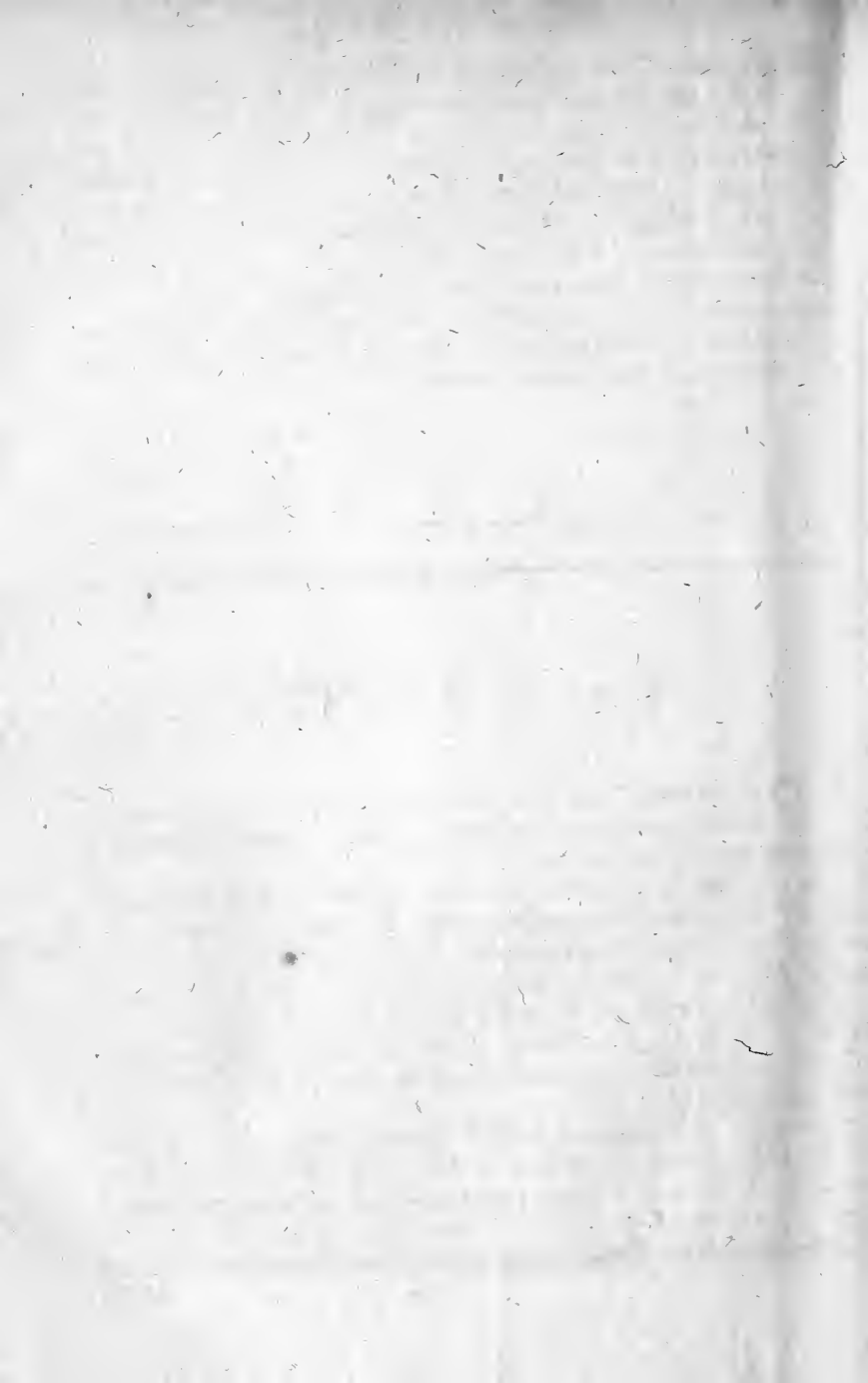
X. Subnotetur etiam in casu quum imago sit hyperbolica, quod hyperbolæ  $YTY$  pars  $YEEY$ , neque non tota  $\zeta V \zeta$  ad circuli partes  $MBN$  pertinent; (nempe si centro  $C$  per  $E$  descriptus circulus ipsam  $FG$  interfecet punctis  $K$ , tota hyperbola  $\zeta V \zeta$  rectam interceptam  $KK$  referet; & hyperbolicae lineæ alterius pars superior  $YEEY$  quod reliquum est repræsentabit hinc indè protensa rectæ  $FG$ ) pars autem  $ETE$  ad partem concavam  $MDN$  spectat. id quod suffecerit admonitum.

Fig. 196.

XI. Et hæc quidem de rectæ  $FAG$  imaginibus absolutis; è quibus commodius de relatis judicium fiet. sit, instantiæ loco, oculus  $O$ , ad quem (convexis è partibus) ab  $F$ , &  $G$  reflectantur  $OMK$ ,  $ONL$ ; & sit ellipsis  $ZVYT$  absoluta (qualem modò definivimus) rectæ  $FAG$  imago; quam ductæ  $FC$ ,  $GC$  punctis  $Z$ ,  $Y$  secent. itaque punctorum  $F$ ,  $G$  imagines ad  $O$  relatæ (puta  $\varnothing$ , &  $\gamma$ ) extra ellipsin







ellipsin jacent. Nam punctum K inter F & Z; ac punctum  $\phi$  inter O, & K; nec non punctum L inter G, & Y; atque punctum  $\gamma$  inter O, & L cadunt. imaginis itaque  $\phi a \gamma$  figura ad ellipticam accedit; eâ tamen aliquanto planior & compressior. non dissimili ratione quoad imagines ad concava factas, & quoad ceteros casus instituetur judicium. tædii plenum esset omnia singillatim percensere. quinetiam è præmissis luculentè constat quo pacto linea  $\phi a \gamma$  præcisè describatur, punctatim utique. circa refractiones paria veniunt præstanda; postquam tamen paullum respiravero; nunc enim verbo quidem pauca, rei qualitatem, studiûmque demonstrandis istis impensum respectando, satis forlasse multa videor tradidisse. ||

## LECT. XVIII.

I. **P**ropositum est jam nobis recta linea ex refractione prognatas ad circulum imagines designare; nempe primum absolutas; quorsum hoc spectat Theorema:

In circulum (e.g. medii densioris) refractivum M B N D radiet recta F A G; huic verò perpendicularis sit recta C A (circuli centrum C permeans) tum in recta F G sumpto liberè puncto F ducatur recta F C; & in hac sit punctum Z limes (qualem antea fiximus) radiationis à puncto F; sit autem Z X ad A C normalis. porro fiat  $CA . CR :: I . R$ ; &  $AR . CB :: CR . CE$  (ponatur autem C E ad X Z parallela) tum connexa R E cum ipsa X Z conveniat in H. dico fore  $XH = CZ$ . Fig. 197.

Nam (è præmonstratis) est  $FC \times MZ . FM \times CZ :: I . R :: CA . CR$ . hoc est  $FC \times CM - FC \times CZ . FC \times CZ - CM \times CZ :: CA . CR$ . quare (ducendo in se extrema, mediâque) est  $FC \times CM \times CR + FC \times CZ \times CR = FC \times CZ \times CA - CM \times CZ \times CA = FC \times CZ \times CA - CM \times FC \times CX$  (quoniam scilicet est

R
CZ.

CZ.FC::CX.CA; adeoque  $CZ \times CA = FC \times CX$ . quapropter (elidendo FC) est  $CM \times CR + CZ \times CR = CZ \times CA - CM \times CX$ ; transponendoque  $CM \times CR + CM \times CX = CZ \times CA - CZ \times CR$ . hoc est  $CM \times RX = CZ \times AR$ . quare (ad analogismum redigendo) est  $AR.CM::RX.CZ$ . hoc est  $CR.CE::RX.CZ$ . hoc est  $RX.XH::RX.CZ$ ; unde  $XH = CZ$ : Quod E.D.

II. Exhinc (& ex iis quæ circa *sectiones conicas* nuperrimè sunt ostensa) liquidò confectatur, si CR major fuerit quàm CE (vel quod eodem recidit, AR major quàm CB) quòd punctorum omnium F in recta FAG imagines absolutæ (quales Z) ad *ellipsin* consistent, cujus Focus C, cujusque penitus determinandæ modum satis facilem tunc ostendimus. item si  $CR = CE$ , quòd imagines istæ ad parabolam erunt; & denique, si  $CR < CE$ , quòd eadem in hyperbolis oppositis reperientur; quarum etiam sectionum focus communis est punctum C, & quarum axes designandi modum reliquaque circa ipsas præsertim advertenda declaravimus. (Nempe, si rectæ CP cum ipsa CA semirectos constituent angulos; & hæ rectam RE interfecent ad puncta S, indeque demittantur ad A C perpendiculares ST, SV, erunt T, V axis termini, restaque CE semi-parameter erit) unde patet totius rectæ FAG ad infinitum protensæ absolutam imaginem (quin & illam, quæ ad oculum in centro C positum refertur) aliquam esse dictarum conicarum, pro suo peculiari situ hanc vel illam respectivè.

Fig. 198.

III. Adnotari porrò debet in isto casu, *sectionis ellipticæ* (quinetiam & *parabolicæ*) TEZ partem anticam TE ad concavas circuli partes LDL spectare; sicuti postica EY ad convexas MBN pertinet. in hoc autem altero tota *hyperbola* ZVZ, nec non *hyperbolæ* ETE pars (infra ECE) YEEY ad partem circuli convexam referri debent (nempe si centro C, intervallo CE descriptus circulus rectam FG fecit punctis K, K; hyperbola ZVZ rectam interceptam KK repræsentabit, ipsiusque FG quod reliquum est hinc inde protensum pars YEEY referet) pars autem superior ETE ad cavam circuli partem LDL spectat. || Semper autem (cùm hic, tum ubique) intelligatur ad utraq; propositi circuli partes ejusdem generis refractionem effici, seu ejusdem speciei medio radios incidere.

IV. Ex his obiter naturæ, quam in oculi figura construenda adhibuit,

buit, solertia quadantenus elucescere videatur, seu ratio quædam affignari possit, cur oculi fundus *Sphæro-dicam* (aut ab hac non multum abludentem) nata sit figuram. quia nimirum illa planorum objectorum modicè distantium (quibus in distinctius apprehendendis potissimus versatur usus) excipiendis simulachris est accommodatissima. Sed hoc  $\pi\alpha\rho\epsilon\iota\sigma\sigma\iota\kappa\omega\varsigma$ .

V. In reliquis refractionum casibus paria fermè contingunt, quos ideo tacitus præterlabi possem; at minuendo vestro labori, seu quò clarius & promptius de iis constet, non gravabor & illos vobis ob oculos ponere: nempe

Rarioris medii circulo M B N obijciatur recta F A G, cui normalis CA; sitque punctum Z puncti cujusvis F, in F G sumpti, imago absoluta; & ZX ad CA perpendicularis; ac CA.CR::I.R; & RA.CB::RC.CE; & ipsi RE connexæ occurrat XZ protracta ad H; eritque rursus XH = CZ. Fig. 199.

Nam est CA.CR:: (FC x MZ . FM x CZ ::) FC x CZ — FC x CM . FC x CZ — CM x CZ . quare CR x FC x CZ — CR x FC x CM = CA x FC x CZ — CA x CM x CZ = CA x FC x CZ — FC x CM x CX. ac indè CR x CZ — CR x CM = CA x CZ — CM x CX. transponendoque CR x CZ — CA x CZ = CR x CM — CX x CM; hoc est RX. CZ::AR.CM::RC.CE::RX.XH. quapropter est CZ = XH.

VI. Hinc dilucidè rursus apparet rectæ F A G imaginem absolutam (vel ad oculum in centro C situm relatam) si R C  $\sqsupset$  CE, *ellipticam* fore; sin RC = CE, fore *parabolicam* (quarum sectionum pars anterior ETE ad convexam circuli refringentis partem M B N pertinet, posterior Y E E Y ad cavam L D L). Quòd si fuerit R C  $\sqsupset$  RE, ejus *imago hyperbolica* erit; & quidem *hyperbola* Y T Y pars superior ETE ad circuli partem N B N referenda est; pars autem inferior Y E E Y unà cum tota hyperbola  $\zeta$  V  $\zeta$  ad partes concavas L D L pertinebit. nempe si fuerint rectæ CK æquales ipsi CE, tota hyperbola  $\zeta$  V  $\zeta$  interceptam punctis K rectæ F G portionem referet, ejusque quod hinc indè protensum superest ab ipsa Y E E Y repræsentabitur. Fig. 200.

VII. Porrò, quoad omnes hosce casus animadvertere licet posse sectionem eandem conicam innumeris rectis lineis ad diversos circulos

concentricos expositis repræsentandis inservire. nimirum in casu postremo, si reliquis stantibus punctum  $A$  indeterminatum ponatur, nihilominus hyperbolæ  $\zeta\upsilon\zeta$ ,  $YTY$  rectas  $FAG$  repræsentabunt ad circulos, quorum semidiametri  $CB$  ipsis  $AI$  singulæ respectivæ singulis æquantur, modò semper intelligatur esse  $CA.CR::I.R.$  id quod satis fuerit obiter admonuisse.

VIII. Ut & illud cursim innuisse suffecerit, quòd sicut à conicis sectionibus rectæ lineæ, ità vicissim *conica sectiones* à rectis lineis ex justa congruos ad circulos inflectione repræsentantur; quos utique non arduum videtur è præmissis deducere.

IX. Ut & exindè *data conica sectione* circulus & recta facilè designantur, ità ut conica rectam illam repræsentet ex inflectione ad istum circulum. Nempe si à foco  $C$  ad axem  $CV$  applicetur normalis  $CE$ ; & recta  $ER$  sectionem tangat ad  $E$ ; factoque  $CR.CA::R.I$ ; ducatur per  $A$  recta  $AI$  ad  $CE$  parallela; sitque  $CB=AI$ ; tum centro  $C$  per  $B$  ducatur circulus  $MBN$ , peractum erit negotium.

X. Ex his tandem de imaginibus ad oculum ubicunque collocatum relatis, quales illæ figuras ac situs obtinent, proclivius erit judicare. scilicet ex saltem unum (in recta per oculi, circuli que refringentis centrum trajecta positum) commune cum absolutis punctum habent; quoad reliqua verò respectiva puncta nonnihil ab his deflectunt ad eas partes, quas oculi situs peculiaris, & radiorum cursus exigunt; id quod facilius sit in singulis casibus qualiter eveniat perspicere, quàm verbis universim explicare. sed enim unam rei declarandæ subjiciemus instantiam. Ad oculum  $O$  refringantur ab  $F$ , &  $G$  radii  $FMO$ ,  $GNO$ ; sit autem *ellipsis*  $TZVY$  rectæ  $FG$  absoluta imago, quam connexæ  $FC$ ,  $GC$  punctis  $Z$ ,  $Y$  secant (ità quidem ut  $Z$  sit puncti  $F$ , &  $Y$  puncti  $G$  imago absoluta) enimverò, de supradictis colligitur punctum  $K$  supra  $Z$  versus  $C$  existere; quinetiam puncti  $F$  in recta  $MO$  imaginem (puta  $\phi$ ) ultra  $FZ$  jacere. Similiter puncti  $G$  imago ( $\gamma$ ) supra  $Y$ , ultràque  $GY$  sita est. unde conjectura fiet de totius imaginis  $\phi\alpha\gamma$  positione, seu figura ad *ellipticam* accedente, qualis in apposita exhibetur figura; quæ certè (quanquam haud absque nimia molestiâ) juxta theoriam suprà constabilitam accuratè poterit delineari.

Fig. 201.

XI. Ità rectarum linearum ad sphaericam superficiem ex inflectione quavis procreatas imagines qualitercunque liceat definire . unde de planarum quoque superficierum ad eandem repræsentationibus haud difficilè statuetur ; harum scilicet imagines absolutæ *conoidum aut Spharoidum Superficies erunt* è rectarum imaginibus respectivis circa radiationum axes converlis progenitæ ; quin & relatæ quoque planarum superficierum imagines è rectarum imaginibus relatis simili pacto progenerantur . rem totam ipsi mentem aliquantillum advertentes perspicietis ; *μετεωρολογία* extremæ fastidium caput.

XII. Restare videtur , ut quomodò compositæ superficies sphaericæ objectas repræsentant lineas dispiciamus . verùm cum imagines indè prognatæ sint altioris gradus lineæ , ab usu notitiæque communi segregatæ , atque proprietatibus intricatis præditæ ; nil aliud quàm operam luderem iis defudans extricandis . illas itaque transiliam ; hoc commonens unicum , punctorum in illis aliquot principalium positiones è præmonstratis dignosci , de cæteris commodius ex conjectura judicari .

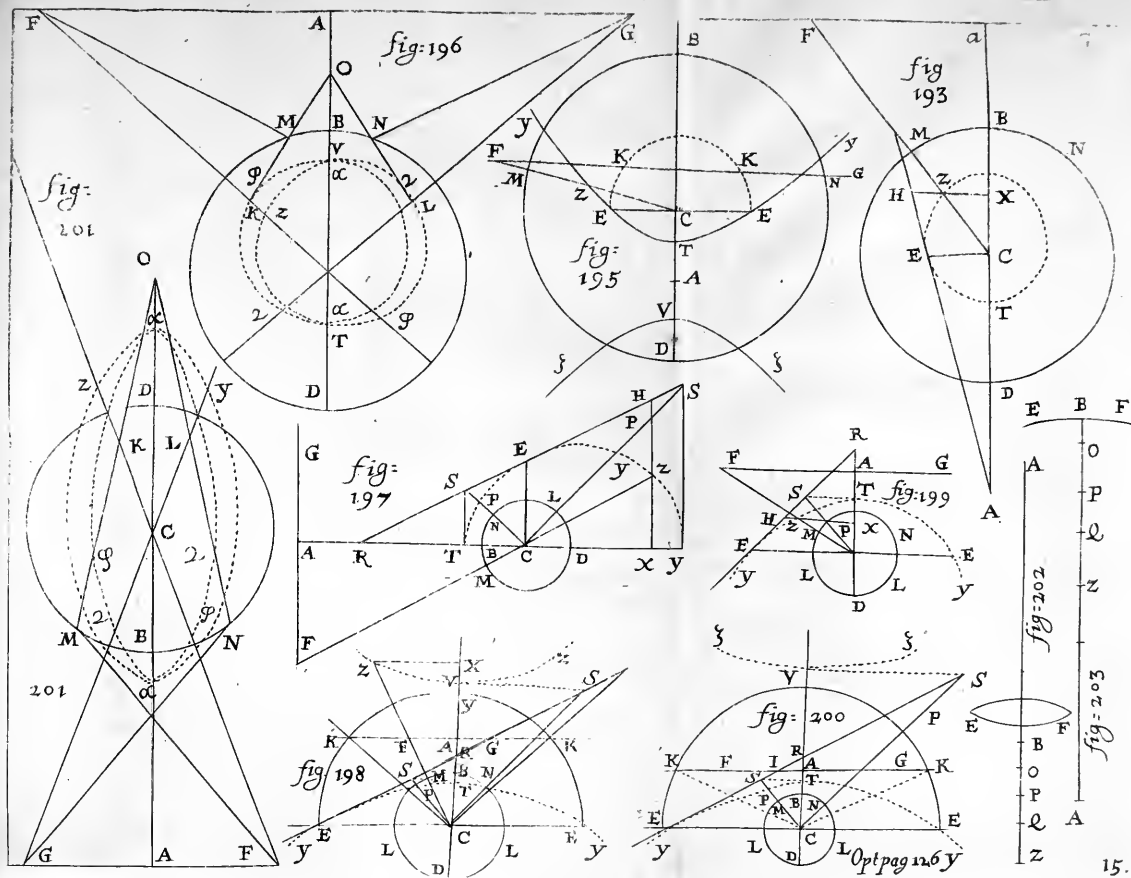
XIII. Hæc sunt , quæ circa partem *Optica* præcipuè *Mathematicam* dicenda mihi suggessit meditatio . circa reliquas (quæ φυσικώπεια sunt , adeoque sæpiusculè pro certis principiis plausibiles conjecturas venditare necessum habent) nihil ferè quicquam admodum verisimile succurrit , à pervulgatis (ab iis , inquam , quæ *Keplerus* , *Scheinerus* , *Cartesius* , & post illos alii tradiderunt) alienum aut diversam . atqui tacere malo , quàm toties oblatam cramben reponere . proinde receptui cano ; nec ità tamen ut prorsus discedam , antequàm improbam quandam difficultatem (pro linceritate quam & vobis & veritati debeo minimè dissimulandam) in medium protulero , quæ doctrinæ nostræ , hactenus inculcatæ , se objicit adversam , ab ea saltem nullam admittit solutionem . illa , breviter , talis est : *Lenti vel speculo cavo* E B F exponatur visibile punctum A , ità distans , ut radii ab A manantes ex inflectione versus axem A B cogantur ; sitque radiationis limes (seu puncti A imago , qualem supra passim statuimus) punctum Z ; inter hoc autem & inflectentis verticem B uspiam positus concipiatur oculus . quæri jam potest , ubi loci debeat punctum A apparere . retrorsum ad punctum Z videri natura non fert (cùm omnis impressio sensum afficiens proveniat à partibus A) ac experientia reclamât . nostris autem è placitis consequi videtur ipsum , ad partes an-

ticas.

Fig. 202,  
203,

ticas apparens, ab intervallo longissimè distito, (quod & maximum sensibile quodvis intervallum quodammodo exsuperet) apparere. cum enim quò radiis minùs divergentibus attingitur objectum, eò (seclulis utique prænotionibus, & præjudiciis) longius abesse sentiat; & quod parallelos ad oculum radios projicit, remotissimè positum æstimeretur; exigere ratio videtur, ut quod convergentibus radiis apprehenditur, adhuc magis, si fieri posset, quoad apparentiam elongetur. quin & circa casum hunc generatim inquiri possit, quidnam omninò sit, quod apparentem puncti A locum determinet, faciátque quòd constanti ratione nunc propius, nunc remotius appareat; cui itidem dubio nihil quicquam ex hæcenus dictorum *Analogia* responderi posse videtur, nisi debere punctum A perpetuò longissimè semotum videri. Verùm experientia secus attestatur, illud pro diversâ oculi inter puncta B, Z positione variè distans; nunquam terè (si unquam) longinquius ipso A liberè spectato, subindè verò multo propinquius adparere; quinimò, quò oculum appellentes radii magis convergunt eò speciem objecti propius accedere, nempe, si puncto B admoveatur *oculus*, suo (ad lentem) ferè nativo in loco conspicitur punctum A (vel æquè distans, ad *speculum*; ) ad O reductus oculus ejusce speciem appropinquantem cernit; ad P adhuc vicinius ipsum existimat; ac ita sensim, donec alicubi tandem, velut ad Q, constituto oculo objectum summè propinquum apparens in meram confusionem incipiat evanescere. quæ sanè cuncta rationibus atque decretis nostris repugnare videntur, aut cum iis saltem parum amicè conspirant. Neque nostram tantum sententiam pulsât hoc experimentum; at ex æquo cæteras quas nôrim omnes; veterem imprimis ac vulgatam, nostræ præ reliquis affinem ita convellere videtur, ut ejus vi coactus doctissimus A. *Tacquetus* isti principio (cui penè soli totam inædificaverat *Catoptricam* suam) ceu infido ac inconstanti renunciârit, adeoque suam ipse doctrinam labefactârit; id tamen, opinor, minimè factururus, si rem totam inspexisset penitiùs, atque difficultatis fundum attigisset. Apud me verò non ita pollet hæc, nec eòusque præpollebit ulla difficultas, ut ab iis quæ manifestè rationi consentanea video, discedam; præsertim quum ut hîc accidit, ejusmodi difficultas in singularis cujuspiam casûs disparitate fundetur. nimirum in præsentè casu peculiare quiddam, naturæ subtilitati involutum, delitescit, ægrè fortassis, nisi perfectiùs explorato videndi modo, detegendum. circa quod nil, fateor, hæcenus excogitare potui, quod adblandiretur animo meo, nedum planè satisfaceret. Vobis itaque nodum hunc, utinam feliciore conatu, resolvendum committo. Ità demum, *Auditores Optimi, Valeatis.*

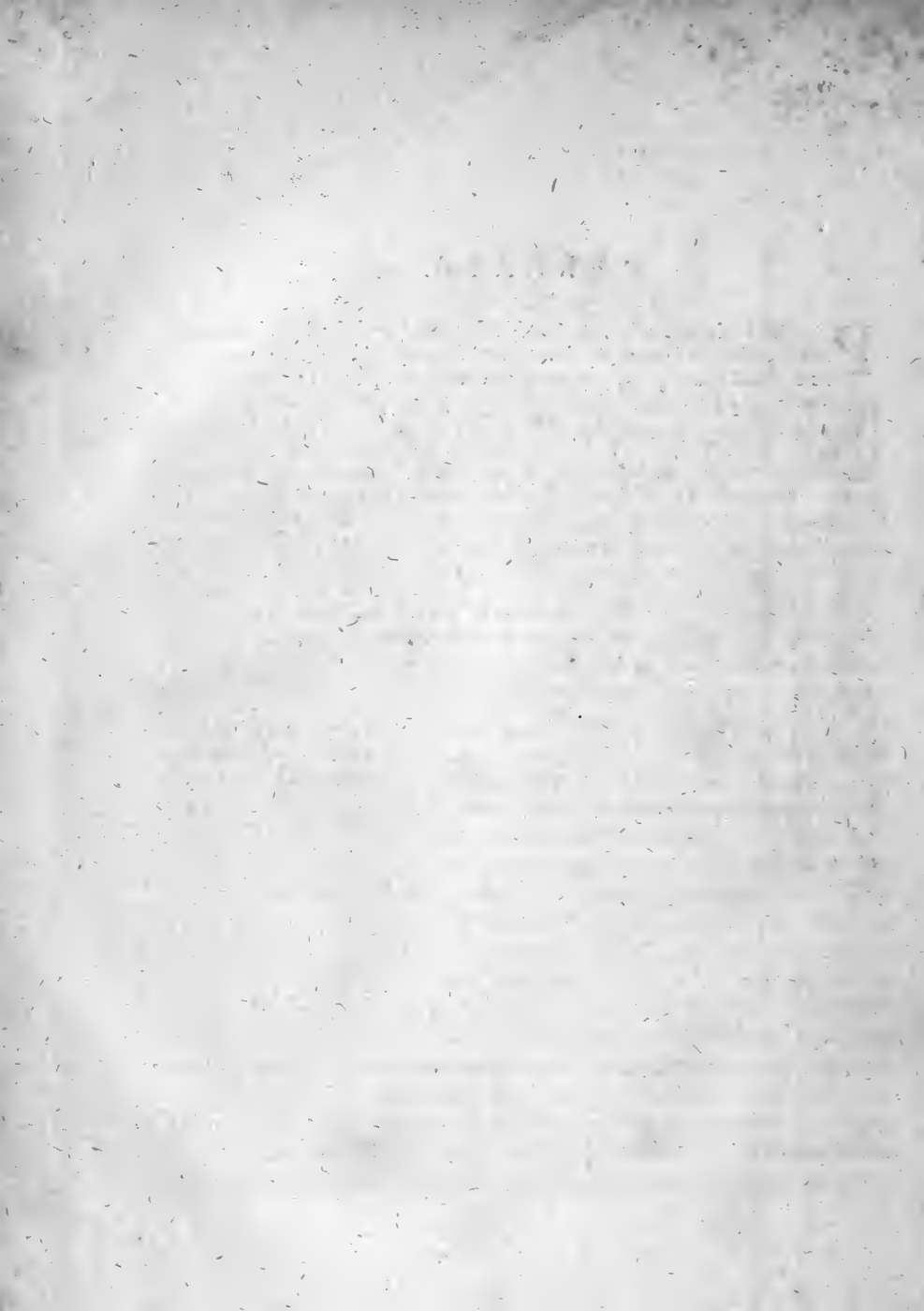






## ERRATA.

**P** *Ag. 3. lin. 25* luce. (præsente, *leg.* luce (præsente *p 4, l 21*, desceptatur / disceptatur *ib. l 31*, valeat, id / valeat *id p 5, l 31*, toto / tota, *p 6, l 23*, dici / dicitur, *p 11, l 10*, allas / alias, *p 13, l 27*, proximo / proximos, *p 14, l 12*, contranimum / contranifum, *p 14, l 16*, effectant / affectant, *p 15, l 14*, nobile / mobile, *p 16, l 20*, in quæ / in iis quæ, *p 17, l 3*, subtracto / substrato, *p 17, l 5*, citentur fig 10, *p 17, l 20*, fig 12 / fig 11, *p 18, l 11*, fig 13 / fig 12, *p 19, l 17*, transmitti / transmittit, *p 22, l 21*  $\pi\sigma\phi\epsilon\mu\eta\mu\alpha\varsigma$  /  $\pi\rho\phi\alpha\eta\mu\eta\mu\alpha\varsigma$ , *p 23, l 6*, incidentes (radios / incidentes radios, *p 23, l 19*, S B protracta / S B (protracta, *p 28*, ambages. I. Demonstratæ prostant / ambages demonstratæ prostant. I. Ut in *Parabola*, *p 29, l 25*, citentur fig 29, *p 29, l 30*, puncto divergentium tanquam / puncto divergentium radiorum reflexi rursus divergunt tanquam, *p 29, l 32*, suo / seu, *p 32, l 10*, fig 34, 35 deleatur, & citentur ad lineam 31, *p 33, l 4*, citentur fig 36, *ibid. l 6*, citentur fig 37 & 38, *p 38, l 28*, I q. R. A B. T / I q. R. & A B. T *p 40, l 17*, Sc / Si, *ib. l 33*, quoquam / quaquam, *p 41, l 24*, abeoque / adeoque, *p 45, l 7*, recissimi / rectissimi, *ib. l 8*, propiores / propiores, *p 47, l 24*, resignare / designare, *p 48, l 1*, Z 2, l 2. *ib. l 12*, Nocetur si fuerit H N P / Notetur si fuerit H N  $\alpha$ , *p 57, l 4*, ejulce / cnjulce, *p 65, l 4*, existimari / existimare, *ib. l 22*, ipse / esse, *p 67, l 13*, interjaceret / interjacet, *p 70, l 3*, posteribus / posterioribus *p 71, l 32*, Adversatur / Advertatur, *p 71, l 15*,  $\gamma S \gamma v l \gamma S. \gamma v l$  *p 78, l 1*, in eodem / eodem, *p 89, l 25*, ratori / ratori, *p 90, l 17*, expansam / expensam, *p 95, l 14*, relectonibus / reflectionibus, *ib. l 40*, Sinus / Simus, *p 96, l 3*, si rplcime / simplissime, *p 97, l 1*, quæsitam / quæsitum, *p 105, l 28*, Posito / Positio, *p 112, l 26*, admodum / ad modum.



# Lectio I.

**N**OVUM jam ingredior dicendi campum; amariorem sane nescio vel feraciorem, uberrimâ varietate confertum, eoque delectabilem; & quia primas fermè *Mathematicarum hypothesum* origines recludit (è quibus nempe *magnitudinum cum definitiones efformantur; tum proprietates emergunt*) necessario perquam utilem. De magnitudinum intelligo generatione; seu de modis, quibus ortæ productæve concipiantur variæ magnitudinum species. Nec ulla certè magnitudo datur, quæ non innumeris modis & intelligi producta possit, & reverà produci. Possunt autem, qui saltem hæcenus usurpati sunt, ad præcipua quædam genera referri, quorum se mihi jam cogitanti suggerentia sunt hæc; *per motus locales; per intersectiones magnitudinum; per quantitate positioneque determinatas ab assignatis locis distantias; per ductus magnitudinum in magnitudines; & per applicationes magnitudinum ad magnitudines; per aggregationem magnitudinum ordine certo dispositarum; per appositionem magnitudinum ad alias, vel subductionem ab aliis; per organici demum* (ab horum quocunque deductam, aut ordinatam) *effectiorem*. Horum, & si qui sunt aliorum modus primarius, & quem alii cuncti quodammodo supponant oportet, utpote sine quo nil procreari potest, est iste, *qui per motum localem*. De quo proinde primo dispiciendum. De motu celebratur illud *Aristotelis* effatum, ἀγνοῦν τὸ ἀγνοοῦν αὐτὸς (κινῆσθαι ἀγνοῦν καὶ τὸ ἐξ αὐτοῦ: ignorato motu necessariò naturam ignorari; in *Physicis* ideò paginam utramque facit; nec immeritò, cum in natura (saltem quantum humanus intellectus assequi valet, aut experientia monstrare) quicquid fiat, à motu fiat, aut certè non absque motu. De natura motus igitur; & rectâ definitione; de causis, de differentiis complura subtiliter argutantur *Physici*, quorum ferè *Mathematicis nihil cordi*

3 *Phys. I.*

*vel cura.* Sufficere potest his quæ communis sensus agnoscit, & obvia comprobant experimenta pro concessis arripere; hoc imprimis generale, Quamvis magnitudinem (magnitudinibus etiam punctum accensebo ceu minimum magnum, ut & infinitum ceu maximum magnum, quibus mediæ interjacent magnitudines omnes finitæ) mobilem esse, hoc est eo quo conspiciamus indies fieri modo locum suum & situm posse demutare, juxta differentias præstitutas, motu nempe vel directo, vel circulari; æquabiliter veloce, vel utcumque magis accelerato, vel magis retardato. Hujusmodi dico motuum quemvis pro lubitu suo tanquam evidenter possibilem assumunt, ut quid exinde consequatur investigent & ostendant. De iis igitur differentiis motuum quotæ sint & quales differemus. In motu potissimum à *Mathematicis* considerantur *ipse modus lationis, & quantitas vis motiva.* ipse modus primò lationis, juxta quem motus, alii progressivi sunt, alii circumlatitii, alii compositi ex his; tum vis motivæ quantitas, propter quam alter alterius respectu velocior, tardior, æquè velox; aut in se æquabilis, acceleratus, retardatus affirmatur. Ex his manant fontibus differentiæ motuum; quorum de posteriore nos primùm agemus, quia nonnulla continet *ἐξωτερικῆ* quæ velim quam primum ablegata, quo reliqua postmodum expeditius fluant & limpidius. & quia vis motivæ quantitas sine tempore dignosci nequit, de temporis natura perstringendum est aliquid. Tempus autem dic fodes, quid est? illud *Augustini* tritissimum nostis; si nemo quærat scio, si quis interroget nescio. Verùm quia *Mathematici* crebrò tempus adhibent, quid eo designetur vocabulo distinctè concipiant oportet; agyrtæ secus futuri. quare jure responsum exigatis; ac statim pareo, sed breviter ac simpliciter, & quantum potero *λεπτολογήματα* defugiens. Abstractè loquendo, tempus est perseverantia rei cujusque in suo esse. Alias verò res aliis diutius in esse suo permanere; fuisse cum hæ non erant, esse cum hæ non sunt; prius incepisse, serius desinere; neque non aliquas cum aliis unà oriri ac occidere, simultaneóq; quasi durationis progressu, à carceribus ad metas, universum ætatis curriculum emetiri, nemini non perspectum est. Ergò tempus absolute quantum est; ut quantitatis admittens (modo suo) præcipuas affectiones æqualitatem, inæqualitatem, proportionem; nec enim diffiteatur quisquam, opinor, *ἰσχυρία* fore, quæ simul exoriuntur & simul intereunt; inæqualiter durasse, quorum unum fuit antequam alterum cæperit esse, nec non esse perseverat, postquam alterum desiêrit existere. Longius autem, & brevius tempus nemo non dicere solet, nemo non concipere videtur. Quantitatis igitur particeps esse tempus communis sensus agnoscit, pro

pro modo permanentiæ rerum in suo esse. At enim dices : ante res omnes conditas annon tempus fuit ? extra mundum , ubi nihil manet , annon tempus labitur ? respondeo , sicut ante conditum mundum fuit spatium , & extra mundum nunc est & quidem infinitum cui Deus coexistit) quatenus potuerunt olim , & possunt jam existere talia tantæque corpora , quæ tum non fuerunt , aut jam non sunt ; ita prius mundo , & simul cum mundo (licet extra mundum) tempus fuit , & est , quatenus ante mundum exortum potuerunt aliquæ res in esse tamdiu permanere , possint jam extra mundum talis permanentiæ capaces res existere ; potuit *Sol* multo prius in lucem emergisse ; possit jam ille , vel alius talis spatiis imaginariis affulgere. Tempus igitur non actualem existentiam , at capacitatem tantum seu possibilitatem denotat permanentis existentie ; sicut spatium capacitatem designat magnitudinis intercedentis. Sed mirum , ingeres , secluso motu tempus explicari ; annon tempus motum implicat ? Minime dico quoad absolutam , & intrinsecam naturam suam ; haud magis quam quietem ; à neutro temporis quantitas in se dependet , seu currant res , seu stent ; seu dormiamus nos , sive vigilemus æquo tenore tempus labitur. Finge stellas omnes ab incunabulis suis fixas persistisse ; nihil indè quicquam temporì decessisset ; tamdiu quies ista perdurasset , quamdiu motus hic effluxit. Prius , posterius , simul (quoad ortus rerum & interitus) etiam in illo tranquillo statu fuisset in se , potuisset à mente magis perfecta apprehendi. Sed prout ipsæ magnitudines sunt absolutè quantæ , independenter ab omni mensuræ respectu , etsi nos ipsarum quantitates nisi mensuras applicando percipere nequeamus ; ita per se tempus quantum est , etsi quo temporis quantitas a nobis dignoscatur , advocandum sit motus subsidium , seu mensuræ quâ temporum quantitates æstimemus , & inter se conferamus ; adeoque tempus ut mensurabile motum connotat , nec enim , si res omnes immotæ persisterent , ullo pacto quantum effluxisset temporis possemus internoscere ; rerum ætas indiscreta nobis , & imperceptibilis cederet. Temporis fluxum non perciperemus dico ? Imo nec aliud quippiam , at stupore continuo defixi seu stipites consisteremus aut saxa. Nihil enim animadvertimus nisi quatenus aliqua mutatio sensum afficiens nos interpellat , aut interna mentis operatio nostram conscientiam laceffit , ac excitat. Ex motus forinsecus impellentis , aut intra nos tumultuantis extensione , vel intensione diversos rerum gradus & quantitates æstimamus. Ità motus quantitas , in quantum a nobis observari potest , à motus extensione dependet ;

*Nec per se quenquam tempus sentire fatendum est*

*Semotum ab rerum motu placidæque quiete;*

Hand malè dixit *Lucretius*. & *Philosophus ipse*; "Οταν δ' αὖτις ὑπὲρ μεταβάλλομεν τῷ δίδωται, ἢ καὶ ὅταν μεταβάλλοντες, ἔδοκεῖ ἡμῶν γινώσκειν χρόνον". Rectè quidem hoc, non videtur nobis, non apparet à somno excitatis quantum temporis intercessit; at non hinc rectè colligitur, Φανερόν ἐστιν εἶναι αὖτις κινήσεως καὶ μεταβολῆς ὁ χρόνος. Non persentiscimus, ergò non est, illatio fallax, & fallax somnus, qui fecit ut nos duo semota temporis instantia connecteremus. interim verissimum illud; εἴη ἢ κίνησις, ποῦτος καὶ ὁ χρόνος αὖτις δοκεῖ γινώσκειν, quantus nempe motus fuit, tantum tempus videtur extitisse; neque quum tantum tempus dicimus, aliud consuevimus intelligere, quam tantum motum intercedere potuisse, cujus scilicet extensioni continuò successivæ rerum permanentiam imaginamur coextendi. Cæterum quia tempus alveo semper æquali, non per vices nunc segnius, tunc rapidius præterlabi concipimus (admissâ siquidem illâ disparitate nullam omninò computationem, aut dimensionem admitteret) non ideò motus omnis æquè determinandæ dignoscendæque temporis quantitati censeatur accommodatus, at is præsertim qui summè simplex & uniformis æquabili semper tenore progreditur; mobili parem ubique vim retinente, pèrque medium uniforme delato. Quare temporì determinando tale quiddam mobile deligendum est, quod saltem quoad motus sui periodos æqualem constanter impetum servat; & per æquale spatium decurrit. Et ad communem quidem usum accipiendus est ejusmodi motus præcipuè notabilis, in promptu cunctis obviu, & sensus omnium incurrens, qualis est motus syderum, imprimis *Solis & Luna*, mirificè sibi per omnia constans, & orbi terrarum conspicuus; qui proinde nedum communi gentis humanæ suffragio deputatus, at divino Creatoris consilio aptus natus est huic usui; à quo nempe pronunciatum legimus: *Fiant luminaria in firmamento Cali, & dividant diem ac noctem, & sint in signa, & tempora, & dies, & annos.* At quomodò, dices, cognoscetur æquabili solem motu ferri, & unum puta diem, aut annum alteri penitus exæquari, vel æqui temporaneum esse? Respondèo non aliter hoc (excepiendo quòd à divino testimonio colligatur) nobis innotescere, quam cum aliis æqualibus motibus ipsum solis motum contendendo. Si nempe deprehendatur solis motus in horologio solari (quod spatiorum à sole in circulis æquatori parallelis percursorum penè certo ac exquisitè quantitates indicat).

*Phys. IV. 16.*

*Gen. I. 14.*



indicat) cum organi cujusvis horodeictici, satis accuratè constructi, motibus consentire. Talis enim machina è fabrica sua comparata est, secundum motûs sui repetitiones succedaneas, æqualiter moveri; *Clepsydram* puta dimetiendæ diei, vel horæ destinata; & quoniam in hac aqua, vel arena quoad quantitatem suam, & figuram, vimque descendendi prorsus eadem manet; nec non vasculum continens, & meatus ipsam transmittens haud omnino variantur, tantillo saltè tempore, perque temperiem aëris consimilem, nec ideo causa subest ulla, cur non æquales in singulis effluxibus motus obire concedatur; ergo si compertum sit, Solares motus, seu quoad integras periodos, seu quoad partes ipsarum proportionales, organi talis repetitis motibus exquisitè congruere, meritò pronuntiandum est, eos prorsus æquabiles, & uniformes fore. Ex quo discursu liquere videtur, id quod fortè non nemini mirum videatur, cælestia corpora non esse, ex parte rei proprièque loquendo, primarias & originales temporis mensuras; ast illos potius motus, qui prope nos sensibus obversantur, & experimentis subjacent nostris, cum horum ope cælestium motuum regularitatem dijudicemus. Nè quidem ipse Sol temporis idoneus iudex, aut testis *αὐτὸς* est, nisi quatenus horariæ machinæ suffragio veracitatem suam adtestatur. Nec sanè, quod obiter interpono, potest ullo pacto sciri num periodi syderum ante multa secula transcurræ nostri seculi revolutionibus omnino pares fuerint; nemo scilicet asserat certò *Μεθυσέλαμ* illum qui tantum non mille vitæ transegit annos, eo fuisse reverà *μακροβιώτην*, qui jam ante centum annos fato cedit. Quid enim, si Sol tum junior, eoque vegetior decuplo citius periodos suas evolverat? Quid si tum aër purior, & inde corporum gravitas validior effecerat, ut vel ipsa organa mechanica citiores acciperent motus, adeoque cum nostri temporis instrumentis comparata fidem suam fallerent? *Empedocles* quidem, apud *Plutarchum*, existimasse dicitur Solem initio dies longè-prolixiores effecisse. Sed minùs id rationi consentaneum videtur, quia tales motus vertiginosi sensim elanguescere potius solent, quàm invalescere. Verum obiter hæc, & vix seriò; revertamur in orbitam. Temporis (seu permanentiæ rerum in suo esse, statu, motive) quantitas, ut dictum est, à motu quolibet dignoscitur, bene notorio, æquabili, (seu quoad partes ad hoc adhibitas sibi constanter æquali ac simili) dein secundariò è quibusvis aliis motibus, qui cum illo comparati proportionè correspondent, è cælestibus impræis, Solis potissimum ac Lunæ. Adeò ut æqualia tempora sint, in quibus eadem clepsydra semel ac iterum, vel æquè multis visibus exhauritur; aut in quibus eadem

eadem sydera periodos easdem, aut ejusdem periodi partes æquales absolvunt; inæqualia verò juxta quamcunque proportionem, in quibus similiter, seu proportionaliter inæquales periodi consumuntur. Neque quisquam objiciat tempus communiter haberi pro mensura motus, & consequenter ad hoc motus differentias (velocioris, tardioris, accelerati, retardati) adsumendo tempus ut præcognitum definiri; nec ideo temporis quantitatem è motu, sed motus quantitatem à tempore determinari; nil enim obstat quo minus tempus & motus hæc libi mutuò præstent officia. Sanè veluti spatium ex aliqua primum magnitudine metimur, & quantum sit discimus, è spatio postea reliquas ei congruas magnitudines æstimamus; ita tempus primò taxamus è motu quodam, postea motus reliquos ex eo judicamus; quod planè nihil est aliud quàm mediante tempore motus alios cum aliis comparare; sicut & mediante spatio magnitudinum inter se rationes investigamus. Qui nimirum è temporum proportionem motuum colligit proportionem, nil aliud quàm ex organorum horologicorum, vel ex Solarium motuum simul decursum proportionem dictam elicit motuum rationem. Quod certè vidit, & exertè docuit *Aristoteles*: ὁ μόνον (inquit) τὸν κίνησιν τῷ χρόνῳ μετρεῖμεν, ἀλλὰ καὶ τῇ κινήσει τὸ χρόνον διὰ τὸ ὁρίζεσθαι ὡς ἀλλήλων. Porro, quia tempus, ut ostensum, est quantum uniformiter extensum, cujus omnes partes æquabilis motus partibus respectivis, seu spatiorum æquabili motu peractorum partibus proportionem respondent, possit id quàm optimè per magnitudinem quamlibet *δμοιομερῆ* repræsentari, hoc est menti nostræ seu phantasie proponi; per simplicissimas præsertim, quales sunt linea recta, & circularis; quibuscum etiam & tempore similitudines & analogiæ non pauca intercedunt. Præterquam enim quòd tempus partes habet omnino similes, rationi consentaneum est ipsum velut unicâ dimensione præditum quantum considerare; ipsum enim velut ex simplici supervenientium momentorum additamento, vel ex unius momenti quasi continuo fluxu constitutum imaginamur, & solam proinde longitudinem ei solemus attribuire; nec ejus quantitatem alias quàm ex lineæ decursæ longitudine determinamus. Sicut, inquam, linea puncti promoti censetur vestigium, à puncto habens quòd aliquatenus divisibilis sit, à motu verò quòd uno modo, secundum longitudinem, dividi possit; ita tempus velut instantis continuo labentis vestigium concipiatur, ab instante nonnullam indivisibilitatem habens, à successivo fluxu quòd eatenus dispertiri queat. Et sicuti lineæ quantitas ab unica longitudine pendet motum consequente, ita temporis quantitas ab unica confectatur velut in longum expor-

exporrecta successione; quam spatii decursi longitudo demonstrat,  
 ac determinat. Tempus itaque per rectam lineam semper designa-  
 bimus; arbitrariè quidem initio sumptam & expositam, at cujus  
 partes proportionalibus temporis partibus, & puncta temporis instan-  
 tibus respectivis justè respondebunt, & iis appositè repræsentandis  
 inservient. His de tempore prælibatis ad considerandam vim motus  
 effectivam procedimus, quæ sanè (quæcunque sit ejus natura, vel  
 undicunque procedat, nam ista *Physicis* disquirenda relinquimus)  
 merito quoque seu quantum quid concipitur, & sicut alia quanta com-  
 puto subjicitur. Etenim experienciâ compertissimum est, sæpe duo-  
 rum mobilium ab eodem termino per eandem orbitam delatorum al-  
 terum alteri prævertere, seu majus eodem tempore spatium confi-  
 cere. Nec aliunde potest hoc procedere, quàm à majori vi, seu  
 potentia motiva, quâ præcellit alterum mobile, cujusque gratiâ velo-  
 citus dicitur. Et quia perspicuum est nil impedire, quin secundum  
 omnimodas proportionales contingat hic spatiorum unà peractorum  
 excessus, ideò vis hæc jure concipiatur in partes quaslibet (quas &  
 sicuti partes cujuscunque qualitatis intensivas succinctæ distinctionis  
 ergò gradus appellare licet, & consuetum est) in partes, inquam,  
 quaslibet infinitas, aut indefinitas divisibilis concipiatur; quas inter  
 se necens, & à se dirimens communis terminus, vel (juxta suppo-  
 sitionem quòd quanta constant ex infinitis atomis) pars absolutè mi-  
 nima dicatur quies, hoc est summa tarditas, aut infima velocitas;  
 è cujus succrescentia, vel intensione continua velocitatis gradus quili-  
 bet eo modo concipiatur aggregari, vel produci, quo linea è puncto-  
 rum appositione, vel motu, tempus ex instantium successione vel fluxu  
 progenitum imaginatur. Unde rem absolutè considerando, quo  
 vis hujusce quantitas menti seu phantasie rectè proponatur; sufficit  
 ejus vice magnitudinem quamvis regularem exhibere (hoc est talem,  
 in cujus partibus quamvis differentiam, quamlibetque proportionem  
 clarè promptèque valeamus apprehendere) simplicitatis adeò perspi-  
 cuitatisque causâ cuilibet ejus repræsentando gradui recta linea cum  
 primis accuratè quadrat. Ità quidem in se generatim & absoluta  
 spectata vis ista tempus non implicat, eoque secluso concipi potest (in  
 quolibet enim temporis instanti, perque quodcunque temporis inter-  
 vallum eà præditum mobile concipiatur) at quatenus computabilis,  
 ac æstimo Mathematico subdita, quâ ratione velocitas dicitur, cum  
 spatio tempus adsignificat; è quibus nempe quantitas ejus dijudicatur,  
 ac discernitur definitur idcirco velocitas potentia, quâ mobile spatium  
 aliquod in aliquo tempore pertransire potest. Unde confectatur sin-  
 gularem.

8  
 gularem velocitatis cuiuspiam quantitatem nec ex sola confecti spatii, nec ex absumpti temporis quantitate dignosci posse (quælibet enim velocitas aliquo tempore quodvis assignatum spatium emetiatur) est ex spatii simul ac temporis quantitatis ad calculum reductis eam innotescere; sicut & vicissim temporis absumpti quantitas non nisi spatii simul ac velocitatis agnitis quantitatis determinetur. Quinimo spatii quoque quantitas (quatenus hoc modo per motum dignoscibilis est) nec est sola definitæ velocitatis quantitate, nec ab assignato tanto tempore dependet, est ab utriusque ratione conjuncta. Et quidem ut hæc quomodo se respiciant amplius exponamus, spatii quatenus hoc modo computatur quantitas eo ferè dignoscitur modo, quo est dimensionibus suis quanta sit superficies innotescit; est quantitate scilicet unius lineæ, (quæ longitudinem ejus aut altitudinem ostentat) & est quantitatibus singularum invicem sibi parallelarum linearum, quæ per istius lineæ puncta quæque transeuntes superficiem totam quodammodo constituunt, & componunt; eam saltem limitant atque determinant; hoc est quasi per ductum singularum ejusmodi linearum in respectiva dictæ lineæ puncta. Velocitatis autem, & temporis quantitates pariter eo modo discernuntur, quo ex superficie, & unius cui applicatur dimensionis quantitate discernitur quanta sit reliqua dimensio (ubivis, inquam, aut saltem alicubi quanta, nam fieri potest ut reliqua dimensio quatenus per omnia prioris dimensionis puncta diffunditur, sibi passim dispar & difformis sit; quid velim est vestigio constabit, nam utilis hæc consideratio postulat enucleatius declarari. Omni temporis instanti, seu indefinitè parvæ temporis particulæ (instanti dico, vel indefinitæ particulæ, nam uti nihil admodum refert, utrum lineam ex innumeris punctis, an ex indefinitè parvis lineolis compositam intelligamus, ita perinde est, utrum tempus ex instantibus, an ex innumeris minutis tempusculis conflatum supponamus; nos saltem brevitati consulentes pro temporibus quantumlibet exiguis instantia, hoc est pro tempuscula repræsentantibus lineolis puncta non verebimur usurpare) cuilibet dico temporis momento competit velocitatis aliquis gradus, quem mobile tunc habere concipiendum est; cui gradui respondet aliqua decursi spatii longitudo (nam hic mobile tanquam punctum, & spatium proinde tantummodo ceu longum consideramus) quia verò temporis momenta quoad rem ipsam neutiquam à se dependent, supponi poterit in proximo instanti mobile gradum velocitatis alium (aliud inquam vel æqualem priori, vel in quavis proportionem diversum) admittere, cui proinde respondebit alia spatii longitudo, tali proportionem respiciens priorem, quali velo-

velocitatis hic gradus præcedentem. Quum enim temporis instantia  
 prorsus æqualia sint inter se, spátialium longitudinum ratio à sola  
 velocitate ratione dependebit, eique proinde par erit, aut similis  
 (quod nisi pro verissimo sumatur, haud ullo modo mensurari possit  
 velocitas; nam à sola spatorum eodem tempore decursum (vel  
 eodem instanti) proportionem velocitatum inter se collatarum imme-  
 diatè vel mediatè ratio taxatur, & altera alterius respectu denomi-  
 natur tanta) similiter si per omnia temporis cujusvis momenta qui  
 conveniunt ipsis velocitatis gradus assignentur, aggregabitur ex iis  
 quantum quiddam, cujus partibus quibuscumque decursum spatorum  
 partes respectivæ, hoc est iisdem temporibus respondentes particulæ,  
 justè proportionantur, adeoque quantum è gradibus istis constans  
 repræsentans magnitudo spatium quoque decursum repræsentare possit;  
 quatenus nempe qualem spatii partes temporibus singulis peractæ pro-  
 portionem inter se servant, exactè referat. Quum igitur, utpote  
 quam æquabilissimè fluens per lineam, ut præmonuimus, rectam ap-  
 tissimè repræsentetur, & qui in singulis temporis instantibus habentur  
 alii ac alii, sibi met æquales; aut inæquales, velocitatis gradus per  
 lineas itidem, ut prius etiam insinuatum est, rectas exprimantur,  
 & cum hi velocitatis gradus singula temporis momenta alii ac alii  
 permeent, independentè à se invicem ac impermixtè; itaque si per  
 lineæ tempus repræsentantis omnia puncta trajiciantur rectæ sic  
 dispositæ, ut altera nulla nulli alteri coincadat, hoc est in situ pa-  
 rallelo; quæ resultat hinc superficies plana (pro quantitate temporis,  
 & positorum velocitatis graduum ratione determinata) graduum ve-  
 locitatis aggregatum exactissimè referet; cujus superficiæ partes cum  
 respectivis (ut prædictum) spatii peracti partibus proportionales  
 sint, poterit id spatio quoque repræsentando commodissimè adaptari.  
 Ista verò superficies brevitatis causâ dehinc appellabitur velocitas ag-  
 gregata, vel spatii repræsentativa. Neque quenquam afficiat, nam  
 submovenda nobis hæc remora, quod diximus in singulis temporis  
 instantibus longitudinem aliquam confici, quasi dari posse motum  
 instantaneum affirmarem. Nam posito tempora è momentis com-  
 poni, etiam lineæ componentur è punctis; quòd si lineæ inæ-  
 quales componantur è punctis infinitis, sibi met æquidistanti-  
 bus, necessariò sequitur linearum puncta, juxta similem cum ipsis  
 proportionem inæqualia fore, adeoque per longitudes in æquitem-  
 poraneis momentis decursas duntaxat intelligenda sunt ejusmodi inæ-  
 qualia puncta, è quibus tota decursa longitudo quasi conflatur. Sin  
 hoc absolum cuipiam videatur, & nullo sensu motus admittatur in-  
 stantaneus.

stantaneus, eò recurrendum ut per instantias nil aliud, quàm indefinitas temporis particulas intelligamus; quibus respondeant certo velocitatis gradu, alio atque alio, percurſa indefinitè minuta ſpatiola velocitatis gradibus adproportionata; tum autem repræſentando ſingulo cuiſpiam velocitatis gradui per tempuſculum aliquod retento, loco lineæ rectæ ſubſtituatur oportet exiguum rectangulum dicto tempuſculo applicatum. Perinde fuerit, ac eodem recidet hoc an illo modo ſe res habeat; aſt ſimplicior & clarior videtur iſte modus, quem priùs expoſuimus, cui proinde poſthac inſiſtemus. Ut redeam, & recolligam; ſicuti per omnia lineæ rectæ puncta traduci poſſunt paralleleæ rectæ, magnitudine pro lubitu pares, vel impares, è quibus aggregatis ſuperficiale planum exurgat, ita ad ſingula temporis instantia applicari poſſunt velocitatis gradus diverſi, pares vel impares, prout mobile per totam ſuam lationem vel eundem impetum retinere, vel aliquando varium adſciſſere ſupponatur, utcunq; crescendo vel decreſcendo. Si velocitatem ſemper eandem conſervare dicatur, facile patet è dictis velocitatem aggregatam definito cuiſvis temporis convenientem rectiſſimè per figuram parallelogrammam exprimi, qualis eſt  $AZZE$ , in qua latus  $AE$  temporis definiti vicem obit, reliquum  $AZ$ , eique paralleleæ rectæ omnes  $BZ$ ,  $CZ$ ,  $DZ$ ,  $EZ$  velocitatis gradus ſingulos per ſingula temporis momenta penetrantes, in hoc ſcilicet caſu pares, exhibent. Poſſunt etiam, ut dictum, parallelogramma  $AZZB$ ,  $AZZC$ ,  $AZZD$ ,  $AZZE$  ſpatia reſpectivis temporibus  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ ,  $AE$  decurſa appoſitè designare. E qua conſideratione ſola, vel intuitu primo motùs huiuſmodi, quem æquabilem, & uniformem vocitant, omnia ſymptomata deduci poſſunt. Quales ſunt: quòd æquali perpetuò velocitate tranſmiſſa ſpatia ſeſe habent ut tempora: Quòd æquali tempore peracta ſpatia ſeſe habent ut velocitates; & viciffim: Si ſpatia ſunt ut velocitates tempora fore æqualia; ſi ut tempora, velocitates æquari. Et ſi æqualia ſpatia fuerint, tempora velocitatibus proportionem reciprocari; contràque, ſi tempora velocitatibus proportionem reciprocantur, ſpatia ſibiſmet exæquari. Spatia denique quælibet compoſitam habere rationem è rationibus velocitatum & temporum; nec non, ſubducendo rationem temporum è ratione ſpatiorum reſiduam manere rationem velocitatum; vel ſubducendo rationem velocitatum relinqui rationem temporum. Hæc enim parallelogrammorum inter ſe comparatorum affectiones ſunt (æquiangularum intelligo parallelogrammorum; nam ubi repræſentativa, hæc parallelogramma conferuntur inter ſe, æquiangulara conſtituantur oportet; alioqui cum

Fig. 1.

ſin-

singillatim spectantur; nihil refert quinam angulus statuatur) hæc, inquam, è parallelogrammorum natura liquent, & ex iis quæ posuimus sponte consequantur; ut nullam aliam demonstrationem requirere videantur. Et sanè quoad omnes Mathematicæ *αἰν* subditas (hoc est utcunque quantitatem involventes) materias cùm magnâ facilitate Theoremata perspicere, tum summo eadem compendio demonstrare poterit, quisquis contemplationi suæ subjecta cujuscunque generis quanta ad analogicas magnitudines ritè congruèque novit redigere. Quòd si porrò velocitatis gradus continuò per singula temporis instantia supponantur æqualiter adaugeri, vel imminui, à gradu minimo, seu quiete, definitum ad velocitatis gradum, vel à definito tali gradu ad quietem; consimili pacto poterit aggregata velocitas per quamvis superficiem æqualiter à puncto crescentem ad definitam magnitudine lineam; vel eodem retrogradè passu decrescentem, exhiberi; simplicissimè verò, & optimè per triangulum rectilineum; ut puta per triangulum  $AEY$ , in quo crus  $AE$  tempus denotat, ejusque punctis applicatæ linæ parallelæ  $BY$ ,  $CY$ ,  $DY$ ,  $EY$  gradus velocitatis singulis instantibus congruos à puncto  $A$  (quod quietem, vel infimam velocitatem refert) ad definitum gradum lineâ maximâ  $EY$  repræsentatum æqualiter incrementes; vel ab eadem  $EY$  retrò ad punctum  $A$  quietis repræsentativum declinantes. Sed & pari jure, quo prius, trigona  $ABY$ ,  $ACY$ ,  $ADY$ ,  $AEY$  per respectiva ab initio tempora decursis spatiis repræsentandis inservient. Et consequenter, si velocitas æqualiter à definito gradu ad gradum definitum supponatur augeri, vel diminui, repræsentabitur tam aggregata velocitas, quàm spatium ei respondens à figura quadrangula Trapezia, qualis est  $CYYE$ , in figura prius adhibita. Hinc, non secus quàm in præcedentibus, hujusmodi motus quem uniformiter acceleratum nomine perquam apto *Galileum* nuncupavit) affectiones omnes præcipuè facillimè deprehendentur, atque demonstrabuntur; cujuscumque sunt: Quòd æquali tempore conficietur æquale spatium per motum à quiete uniformiter acceleratum, ac per ipsum motum uniformem, modò velocitas hujus subdupla sit velocitatis, quam ille maximam habet. Quòd spatia motu à quiete uniformiter accelerato peracta, sese habent ut *Quadrata temporum* (vel in duplicata temporum proportionem.) Et diversos hoc modo acceleratos motus comparando: Quòd ab illis transacta spatia habeant rationem è rationibus temporum, & velocitatum maximarum: Et similia talia vel his connexa, vel inde consequentia, quæ triangulis conveniunt inter se quoad suas, & quoad laterum rationes comparatis; quæ ex positis haud difficilè perspiciantur, ac demon-

Fig. 1.

Fig. 2.

strentur. Porro, non absimiliter si velocitatis gradus continuâ per singula temporis instantia successione, à quiete ad definitum gradum, vel retrogradè, crescere concipiantur, aut decrescere juxta progressionem numerorum quadraticorum repræsentatur tum optimè velocitas aggregata, sicut & spatium hujusmodi motu confectum, à complemento Semiparabolæ, qualis est  $AEX$ , cujus vertex  $A$  quietem (seu morûs ac temporis initium) tangens  $AE$  tempus definitum, linea  $BX$  primum velocitatis accrescentis gradum (qui se habet ut 1.) proxima  $CX$  secundum gradum (habentem se ut 4.) subsequens  $DX$  (qui se habet ut 9.) & ità porro usque ad ultimum  $EX$ : Id quod ex notissima parabolæ proprietate manifestum est. Eodem planè modo quivis suppositi velocitatis gradus, utcunque crescentis aut decrescentis, continuò vel interruptè, quovis, inquam, imaginabili modo per lineas rectas ad temporis repræsentatricem rectam applicatas certissimo, commodissimoque modo designari possunt, asservatâ quam quis assignare voluerit proportionem; lic ut inde cognitâ spatii repræsentantis dimensione, spatii per motum confecti quantitas faciliùs innotescat; & reciprocè, cognitâ spatii dicti naturâ velocitatis ac temporis quantitatis dignoscendis aliqua lux affulgeat: Quæ quidem posthac dicendorum intellectui necessaria, totique motuum theoriæ non parùm ut videtur utilia visum est paullo fusiùs exposita præmittere. Quà perfunctus operâ pedem figo.

LECT.



## LECT. II.

Varios, quibus productæ concipiantur magnitudines aggressi modos considerare, primum & præcipuum attingere capimus illum, qui motu peragitur locali. Cum verò soleant *Mathematici* diversimodos, è quibus aliæ ac aliæ magnitudines resultant, motus adsumere ceu possibiles, duos ad fontes digitum intendimus, è quibus istæ motuum differentia scaturiant, modum lationis ipsum, & quantitatem vis motivæ; quorum posteriorem haud ita clarum & apertum nuperrimè conati sumus recludere, limpidumque reddere. Jam differentias quas assumunt ipsas prosequemur, & quo pacto generationi magnitudinum inservire possunt ostendemus. Lationis modum spectando generantur magnitudines vel per motus simplices, vel per motus compositos, vel ex concursu motuum (nam compositionem à concursu distinguo, quæ tamen à nonnullis confunduntur.) De simplicium motuum hypothesibus, ac effectis primò videamus. Simplicium motuum duo genera sunt, *progressus*, & *perambulus*, progressio, & circumlatio. Sub progressivo motu comprehenditur motus omnis, qui nulum fixum locum (loci nomine quamvis magnitudinem, etiam punctum adnumerans, intelligo,) respicit, cui velut innectitur, ac affigitur; seu directus iste motus sit, seu reflexus, seu refractus; live callem certum persequatur, sive inconstanter desulter, divagetur, exorbitet. Quia vero penitus irregularem in arte nulla ratio potest haberi, sufficit *Mathematicis* supponere magnitudinem quancunque progredi posse juxta designatam quamlibet orbitam; ut v.g. Quod punctum in linea recta, circulari, elliptica, spirali, vel alia quavis præstituta queat incedere. Verùm præcipuè, hoc est maximi, frequentissimique pro magnitudinibus efformandis usus, circa hujusmodi motus quas *Mathematici* præstruunt hypotheses, sunt hæ: Quod punctum à præfixo termino in linea recta quousque libuerit assignare directè progredi queat, quali motu perspicuum est lineam rectam describi:

describi: Quod linea recta per alterius cuiusvis lineæ longitudinem ita procedere possit, ut situm interea parallelum perpetuo seruet (hoc est ut ipsa juxta positionem, quam in quolibet temporis momento sortitur, parallela sit sibi secundum positionem suam in alio quovis temporis momento:) Item, quod linea quævis (definitè vel indefinitè protensa, quod in omnibus intelligendum) motu directo, itidem sibi parallelo, progredi possit (directo inquam, hoc est ut ejus singula puncta lineas rectas describant) qui sine duo motus sibi met æquivalent, eundemque procreant effectum eorumque alterutro productæ concipiuntur illæ, quæ præ cæteris æquabiles, ac uniformes haberi merentur superficies; quales sunt in plano *Superficies parallelogramma* (seu penitus rectilineæ, sive mixtæ) in Solido (ut ita dicam, vel non in uno plano delineatæ) *Superficies Prismaticæ, Cylindricæque*, tum quæ stricto, tum quæ latiori significatu dicuntur. Sit in exemplum primò recta lineæ  $BC$ , cui insistent recta  $AB$  per ipsam  $BC$  feratur, sibi continuo parallela, donec puncto  $B$  ad  $C$  promoto recta  $AB$  ipsi  $DC$  ad  $AB$  parallelæ congruat. Manifestum est hujusmodi motu procreari figuram planam parallelogrammam  $ABCD$ . Patet etiam quodlibet assumptum in  $AB$  punctum, ut  $E$ , rectam lineam describere, cujus partes  $EE$  rectis  $AB$  interceptæ, rectæ  $BC$  partibus  $BB$ , per easdem respectivè rectas  $AB$  interceptis (hoc est eodem tempore à puncto  $B$  decursis) æquantur. Neque minus patet, si vice versâ recta  $BC$  per ipsam  $BA$  feratur, eandem superficiem delineari; omniæque rectæ  $BC$  puncta (ceu  $F$ ) rectas lineas effingere; nec non harum partes  $FF$  parallelis  $BC$  interceptas respectivis lineæ  $AB$  partibus  $BB$  adæquari. (Notetur autem abhinc brevitatis ergo tam in his, quam in similibus casibus harum linearum illam, quæ motu suo magnitudinem describit à me *Genetricem* dici; alteram autem, juxta quam, vel cui insistent, prior deferatur, *Directricem* appellari; quia motæ lineæ processus ab ea dirigitur, vel ad eam accommodatur.) Sit rursus linea quæpiam curva (velut arcus circularis)  $BC$ , cui in eodem plano insistant linea recta  $AB$ ; & per curvam  $BC$  continuo deferatur recta  $AB$ , sibi met æquidistans, donec punctum  $B$  ad  $C$  pertigerit, & recta  $AB$  demum rectæ  $DC$  ad ipsam  $AB$  primò positam parallelæ congruerit, describetur hoc motu figura quoque plano (latiore significatu) parallelogramma; quia scilicet adversa hujus figuræ latera sibi parallela sunt, recta  $AB$  rectæ  $DC$ , & curva  $AD$  curvæ  $BC$ . Nam & hîc singula quæque *Genetricis* rectæ puncta (velut  $E$ ) lineas describent *directrici*  $BC$  similes & æquales; cum integras, tum iisdem parallelis  $AB$  interceptas partes, si enim duo puncta

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

puncta quævis  $EE$  rectâ lineâ connectantur, iisque respondentia puncta  $BB$  rectâ quoque jungantur; quoniam rectæ  $EB$  sibi met æquantur (etenim nil aliud sunt, quam eadem ipsa linea diversum situm obtinens) ac parallelæ secundum *hypothesein*, erunt rectæ  $EE$ ,  $BB$  æquales ac parallelæ. Unde patet curvas  $EE$ ,  $BB$  adæquari sibi met, & assimilari. Adæquari quia subtensæ omnes  $EE$  subtensis  $BB$  singillatim æquantur; assimilari, quia rectæ  $AB$  cum subtensis adjacentibus respectivis  $EE$ , &  $BB$  pares angulos constituunt, adeoque rectæ ipsæ  $EE$  pares iis, quos rectæ  $BB$ ; ipsæ illæ cum seipsis, & hæc cum seipsis (nam in hujusmodi proportionalitate partium, & angulorum æqualitate, sicut alibi fortasse luculentius & fusiùs disseremus, omnis consistit linearum, & quarumcunque magnitudinum similitudo.) Quod si vice commutatâ linea curva  $BC$  fiat linea *Genetrix*, & recta  $BA$  *directrix*, hoc est si  $BC$  per  $BA$  sibi parallela feratur, producet eadem ipsissima parallelogramma Superficies; & singula rectæ  $BC$  puncta, veluti  $F$ , rectas lineas ad  $BA$  parallelas describent; neque non interceptæ  $FF$  respectivis  $BB$  pares erunt; quod & pari modo ex supposito perpetuo curvæ  $BC$  parallelismo facili confectatur. Sit denique curva quævis. (vel è rectis angulos efficientibus composita, quæ curvæ quoque nomen merito ferat; *Archimedes* saltem è rectis compositas lineas, uti figurarum circulis inscriptarum aut adscriptarum perimetros, *καμπυλῶν χαμψῶν* nomine complectitur; ut & vicissim curvæ quævis lineæ censeri possunt è rectis, innumeris quidem illis indefinitè parvis, adjacentibus, & deinceps secum angulos efficientibus, conflata) sit, inquam, talis aliqua curva  $BC$ , in plano quovis constituta, tum in alio plano, vel super lineæ  $BC$  planum ut liber elevata, recta  $AB$  sibi continuo feratur parallela, modo quo semel ac iterum ostendimus; describetur hujusmodi motu *Superficies cylindrica* (vel certè *prismatica*, si linea *directrix* è rectis ponatur composita) & *cylindrica* quidem strictè dicta, si *directrix* fuerit linea *circularis*, aut *elliptica*; latiore verò sensu talis, si curva fuerit alterius generis ut *parabolica* puta, vel *hyperbolica*, vel alia quæpiam. In hoc autem motu lineæ quoque generatricis singula puncta similes & æquales describunt curvæ *directrici* lineas; æquales (ut in mox præcedente discursu) quoniam  $EB$  pares ac parallelæ sunt; adeoque  $EE$ ,  $BB$  quoque pares, ac parallelæ; similes; quoniam etiam anguli  $EEE$ , angulis  $BBB$  æquantur. Quinetiam reciprocè describatur eadem Superficies ponendo curvam  $BC$  per rectam  $AB$  parallelas deportari. Quomodo singula quoque curvæ  $BC$  puncta rectas parallelas & pares interceptis respectivis rectæ

Fig. 5.

Fig. 6.

10. XI. Elem.

rectæ  $AB$  partibus delineabunt, pariter ut antehac in figuræ planæ exemplo commonstratum est; unde si superficies hoc modo procreatæ à plano quolibet ad rectam seu genetricem, seu directricem (quam ubique sitam Superficieî productæ latus appellare licet) parallelo fecetur, sectio communis duabus rectis parallelis constabit æqualibus inter se. De Superficiebus autem ita progenitis observatu dignum est (nec enim planè nudas magnitudinum generationes indigitare, sed & generales nonnullas ipsarum affectiones è diversis resultantes generandi modis insinuare propositum est nobis) quòd si linea directrix recta sit (ut in figura per litteram  $Z$  discriminata) Superficieî productæ partes parallelis lineis genetricibus interjectæ respectivis directricis lineæ partibus semper proportionales sunt (superficies nempe  $BCCB$  respectivis rectis  $BB$  :). At si linea curva pro directrice habeatur (ut in figura  $Y$ ) non semper eveniet, ut interceptæ genetricibus rectis Superficies interceptis curvæ directricis partibus proportionentur; at saltem accidet hoc, cum recta genetrix  $AB$  æqualiter ad curvam  $BC$  ubique, vel secundum omnia ejus puncta inclinatur; quomodo fit in cylindri cujuscunque, laxè vel strictè dicti, recti superficie; quia tum recta genetrix omnibus curvæ punctis (hoc est omnibus eam ad dicta puncta tangentibus, eive subtenfis rectis est perpendicularis.) Verum si, in exemplum, curva  $BC$  ponatur arcus circularis, qui dividatur æqualiter ad puncta  $B$ , non erunt necessariò superficies  $ABBA$  peripheriis æqualibus  $BB$  insistentes inter se pares, quia (præterquam in casu prædicto cylindri recti) rectæ  $AB$  ubique ad puncta  $B$  inæqualiter inclinantur (unam quamvis inclinationem cum alia conferendo) angulos nempe cum tangentibus ad  $B$  aliis ac aliis, & cum subtenfis  $BB$  inæquales efficiunt. E qua re pendet *insuperabilis illa difficultas*, quacum conflictantur, qui *cylindricas obliquas superficies conantur dimetiri, seu cum Cylindricis Superficiebus rectis, aliisve quadantenus cognitis Superficiebus quoad proportionem comparare*. Supponunt denique consimili pacto superficiem quamvis planam directo motu sibi parallelo progredi, scilicet ut prædicto modo, singula ipsius puncta lineas rectas describant, inter se pares, ac parallelas; vel ut ejus singulæ rectæ (id quod indè confectatur) planas Superficies parallelogrammas effingant; cujuscmodi motu describuntur prismatica quæque cylindricaque corpora; illa nimirum ipsa, de quorum Superficiebus mox egimus, quibûsque simili jure possunt adaptari, quæ Superficiebus istis ostendimus convenire. Veluti quòd parallelis planis interjectæ Superficies ipsorum, & ipsa corpora lateribus suis (seu directricis rectæ partibus respectivis) proportionantur. Quòd & si definita hujuscmodi corpora planis

Fig. 6.

planis laterum alicui parallelis secantur, communes sectiones erunt *Parallelogramma* (quale est  $EEBB$ .) Quin, ut paucis complectar multa, quæ de *Superficiebus aut Solidis Prismaticis ac Cylindricis* strictè dictis generatim enunciantur aut probantur uspiam, quòd ea pleraque justam analogiam observando, universis congruunt hoc modo progenitis quantis. Neque jam de progressivo motu quidpiam succurrit adjiciendum; quædam enim *συνήγησις* consultò videntur reticenda. Porro simplicis motûs alterum genus, quod adhibet *Mathesis*, est *circumlatio*, seu *motus conversus*; qui tum scilicet efficitur, cum dimotæ magnitudinis quiddam (ut punctum aliquod puta lineæ, vel Superficieï lineæ) fixum & immotum consistit, dum ei velut innodata ac adstricta tota reliqua magnitudo, juxta quamvis assignatam directionem, circummagitur. Cujusmodi motûs generalissima proprietas est, ut quæque mobilis puncta dum in uno aliquo plano transverse moventur, circulares singula peripherias describant; & quidem omnia, quæ in eodem uno, per fixum punctum transeunte plano moventur parallelas, seu concentricas, & similes inter se; quæ verò in diversis planis similes, aut dissimiles, prout hypothesium exigit arbitraria diversitas. Præ cæteris autem propria, maximeque naturalis est circumlatio, cum singula mobilis puncta circulares unius ejusdem circuli peripherias describunt, hoc est cum in uno cuncta plano circumferuntur; qualem certè tum ipsa natura sponte concipit atque prosequitur, cum nè rectos suos quos præsertim affectat motus exequatur ab immobili retinaculo prohibere; velut in pendulorum, & libris appensorum motibus videre est; imò cum objectâ quâvis resistentiâ non satis faciliè recto tramiti valet inhærere; sicut in *rotarum*, & *vorticum*, & *turbinum*, & in ipsorum fortasse *syderum*, motibus adparet. Verùm hujusmodi motuum generalem indolem haud ità promptum est verbis explicare. Præstat ipsas quas accipiunt præcipuas hypotheses percensere. Assumunt primò rectam lineam in plano circa punctum quodvis in ipsa fixum posse circumferri; cuiusmodi motu patet omnia lineæ motæ puncta circulares peripherias describere; singulas ab uno quovis descriptas singulis ab altero quolibet simul eodem tempore descriptis parallelas, & similes. Ut si lineæ recta  $AB$  manente fixo puncto  $C$  circumferatur, singula puncta  $A$ ,  $E$ ,  $B$  peripherias circulares  $AA$ ,  $EE$ ,  $BB$  sibi parallelas, & similes omnes (iisdem nimirum, aut æqualibus angulis subtensas, quorum commune centrum, aut vertex  $C$ ) describent. Hoc autem modo constat procreari circulos, & sectorum circulares areas (quales  $ACA$ ,  $BCB$ ), sed & annulos planos; qualis est is qui restat, si è circulo

Fig. 7.

D

majore

majore  $A A B B$  detrahatur minor circulus concentricus  $E E E E$ .  $E$  qua genesi colligitur circularum, & sectorum circularium areas, & circularibus peripheriis, integris aut partialibus concentricis ac similibus, constare tot numero quot radius puncta habet; quarum proinde calculum incundo circularis areæ talis qualis dimensio quam facillimè reperitur; id quod non est hujus temporis ulterius exponere. Quinetiam supponunt lineam quamvis rectam, indefinitè protensam, uno manente fixo ipsius puncto circa designatam quamvis in alio plano constitutam lineam, curvam aut è rectis compositam, revolvi, sic ut ei nempe lineæ semper insistat, vel eam quasi lambat, aut perstringat. Sit, exempli causâ, linea recta  $A B$  indefinitè protensa, & in ea fixum punctum  $V$ ; & per  $V$  semper feratur linea  $A B$  juxta lineam quamlibet  $B C$  in alio plano collocatam; ita quidem ut aliquod lineæ mobilis punctum continuò lineæ  $B C$  inhæreat; ex hujusmodi motu producetura curva Superficies (è planis saltem composita, quam & generali ratione, post *Archimedesem*, curvam appellare nil vetat) quæ quidem si linea directrix tota componatur è definitè magnis rectis lineis, fiet *Superficies pyramidalis*, è triangulis ad verticem  $V$  concurrentibus aggregata; si circularis fuerit, aut conicarum sectionum aliqua, Superficies evadet strictè *conica*; si alterius generis aliqua, conica saltem extenso latius significatu dicatur; & à quibusdam dicitur. Cujus quidem Superficiei proprietas est, ex ipsa generatione manifesta, quod si per fixum punctum  $V$  plano secetur, communis plani cum ipsa sectio erit angulus rectilineus. Nam si planum ipsam secans per  $V$  lineæ directrici occurrat in punctis duobus, ut in  $D, E$  (occurreret autem in duobus, aliàs Superficieim ipsam non secaret) ductæ rectæ  $VD, VE$  erunt tam in plano secante, quàm in curva Superficie; in plano, ex plani natura; in Superficie, quia genetrix eadem recta per harum terminos transit, ipsisque proinde coincidit. In hujusmodi verò motu posito quod lineæ rectæ à puncto fixo  $V$  (seu vertice) ad directricem lineam  $B C$  ductæ sunt inæquales inter se, satis liquet lineam  $B C$  non à lineâ  $B$  delineari, vel perambulari, quia lineæ inæquales (ut  $VB, VE, VC$ ) sibi nequeunt congruere; adeoque punctum  $B$  progrediens supra, vel infra puncta  $B, E, C$  cadet, ut nec eâdem inæqualitate suppositâ punctum quodvis aliud in  $VB$  puta  $G$ ) motu suo lineam describet lineæ directrici  $B C$  similem (quare linea  $VB$  supponitur indefinitè protensa) at verò si lineæ omnes, quæ ab  $V$  ad  $B C$  duci possunt (quas Superficiei propositæ latera nuncupemus licet) proportionaliter secantur (id quod fiet à plano per hanc Superficieim trajecto ad planum, in quo sita est  $B C$ , parallelo) divi-

sionum

Fig. 8.

Fig. 8.

tionum puncta lineam constituent, saltem ad lineam consistent, ipsi BC similem. Ductis enim quotlibet lateribus VB, VD, VE, VC, & ducto plano GKLH ad planum BDEC parallelo, sint communes plani VBD cum planis BC, GH sectiones rectæ BD, GH; hæc parallelæ erunt. Item communes plani VDE cum iisdem planis BC, GH sectiones DE, KL parallelæ erunt. Ergo anguli BDE, GKL sunt æquales. Item se habet recta BD ad GK, ut DE ad KL, quia utraque hæc proportio æqualis est illi, quam habet VD ad VK (similia quippe sunt triangula VDB, VKG, & triangula VDE, VKL) permutandoque  $BD \cdot DE :: GK \cdot KL$ . ergo omnes subtensæ in GH proportionales sunt subtensis omnibus in BC, eas nimirum in utraque linea ordinatim & deinceps accipiendo; & quæ sibi adjacent in una pariter inflectuntur cum iis, quæ sibi adjacent in altera. Ergo secundum superius insinuata lineas BC, GH similes esse constat. || Hinc etiam patet lineas curvas similes BC, GH eandem ad se proportionem habere, quam Superficierum, in eadem qualibet recta sita, latera VB, VG. Quum enim subtensarum iisdem angulis inclusarum (ut BD, GK, vel DE, KL) singulæ rationes æquales sint rationi laterum VB, VG; etiam omnes antecedentes conjunctæ (hoc est tota BC) ad omnes consequentes conjunctas (hoc est totam GH) se habebunt ut VB ad VG. - Hinc etiam tali motu productarum superficierum emergit hæc proprietas; quod interceptæ scilicet à parallelis ad BC planis, à vertice desumptæ, quibuscunque lateribus iisdem inclusæ partes ipsarum sint inter se similes; ut puta Superficies BVC, GVH, & BVD, GVK. (Quod ex generali similitudinis doctrina posthac explicanda luculentius apparere poterit; interim ex similitudine linearum curvarum, & earum cum Superficie lateribus analogia, penitusque consimili Superficierum generatione satis elucescit; saltem ex triangulorum VBD, VGK; & VDE, VKL, & talium omnium similitudine satis constat; siquidem ex talibus infinitis triangulis utraque Superficies composita censeatur.) Unde similibus Superficierum proprietates iis convenient. Verum quod interceptas attinet à diversis lateribus Superficies, eas inter se comparando, notandum est quod basibus suis, seu directricis lineæ respectivis partibus non semper proportionales sunt; at saltem hoc tum evenit, cum omnia dictæ Superficie latera sunt æqualia inter se, adeoque cum linea directrix est peripheria circuli; quo casu producta Superficies erit conica Superficies strictè dicta, rectumque quidem ad conum pertinens. Quod si directrix BC supponatur e. g. peripheria circularis, lateraque sibi adjacentia, si

16. XI. Elem.

10. XI. Elem.

12. V. Elem.

dividatur  $BC$  in partes æquales, & connectantur latera  $VD$ ,  $VE$  non erunt Superficies  $BVD$ ,  $DVE$ ,  $EVC$  æquales inter se, sed inscrutabili plerumque ratione; juxta varias angulorum inclusorum, & laterum inæqualium differentias, inæquales; id quod hactenus illos divexavit & torfit, *qui dimetienda conis caleni superficiei incubuerant.* || Ex his confectatur quod possit hujusmodi circumlatio facta quadantenus concipi motu quoque tali lineæ rectæ generitricis, ita ut ejus singula quæque puncta parallelos lata similes directrici lineæ lineas describant, modo tamen concipiatur linea genetrix ubique proportionaliter aut contrahi, vel dilatari secundum omnes sui partes. Quomodo nempe si recta  $VB$  ita sensim diduci concipiatur, ut punctum  $B$  totam lineam  $BC$  perambulet, etiam punctum  $G$  parallelo ad  $BC$  motu delata, lineam  $GH$  ipsi  $BC$  similem describet. Quinimò si consimili pacto curva  $BC$ , directo quoad lineam rectam  $BV$  motu sitûque semper ad seipsam parallelo concipiatur promoveri, sic ut ejus singula quæque puncta lineas rectas describant, secum omnes in punctum  $V$  concurrentes; hoc est ita ut ipsa per totum suum progressum juxta suas omnes partes analogicè contrahatur, ad verticem usque  $V$ ; producentur ex hujusmodi motibus Superficies conicæ prorsus eadem cum jam proximè tractatis. Verùm hujusmodi motus imaginarii sunt, & quales rerum natura respuit. Explicandæ tamen hujusmodi Superficierum naturæ deservire possunt, & supponi saltem ut per *divinam potentiam effectibiles.* || Ad hæc, si linea directrix in motu proximè memorato supponatur undique clausa, sic ut figuram quamvis comprehendat, Superficies curva progenita cum hac figura, ceu base, corpus solidum includet pyramidale, vel conicum (strictè vel laxè pro dictæ figuræ natura sumptum) cujus generalia symptomata satis è dictis elucescunt. Nempe quod à parallelis ad hujusce solidi basin planis abscindentur similes ad verticem Superficies, similèsq; bases intercipientur, & similia corpora Solida progignentur. Verbo dicam, quæ de *Conis* generatim *Euclides*, *Apollonius*, alique tradiderunt, ea conicis hoc modo factis, servatâ debitâ analogia, convenient, & simili ferme modo demonstrabuntur convenire. || Verùm usitatissimus apud Mathematicos corpora progignendi modus est is qui peculiari nomine *Rotatio* dicitur, & fit supposito lineam quamvis, aut quamlibet Superficiem planam circa rectam lineam fixam, tanquam axem, revolvî. Quomodo ex motu Semiperipheriæ circularis circa diametrum producitur *Sphærica Superficies*, ex motu Semicirculi ipsius circa eundem *Sphæra* detornatur; ex motu lineæ rectæ circa lineam ipsi parallelam *Superficies Cylindrica*; ex motu parallelogrammi rectanguli circa latus unum ipse *Cylindrus rectus*; ex motu curvis unius



unius anguli rectilinei circa alterum *Conica Superficies*; ex rectanguli trianguli circa crus unum anguli recti *conus* ipse deformatur; eoque pacto cum integra cum suis Curvis Superficiebus Solida magnitudines innumera, tum ipsarum portiones, frustra, tubi, annuli procreantur. Cujusmodi motus hæc præcipua proprietas est, quod singula quæque magnitudinis circumductæ puncta peripherias obeant circulares (integras quidem illas, modò perfecta sit revolutio, seu mobile denovo primum in situm restituatur, at similes utcumque sibi mutuo, quæ simul describuntur) quarum omnia Centra sunt in dicto axe, radii verò sunt rectæ ab ipsis punctis ad axem perpendiculares. Vel; quod omnes in mobili sitæ rectæ lineæ axi perpendiculares efficiunt circulos (si revolutio ponatur integrè peracta) aut circulares similes sectores, illos intelligo qui simul eodem tempore delineantur. Ut si v. g. linea quævis circa axem  $VK$  rotetur, eo procreabitur motu curva quædam Superficies, circularibus quasi peripheriis constans (*Atomistarum* enim phrasin facilitatis, perspicuitatis, brevitatis, addere licet & verisimilitudinis causâ non illibenter usurpo) circularibus, inquam peripheriis  $AY, BY, CY, DY$  per puncta  $A, B, C, D$  reliquæque quæ sunt in  $VD$  cuncta decircinatis; quarum radii sunt rectæ  $AZ, BZ, CZ, DZ$  axi perpendiculares, & Centra  $Z$  in axe. Quod si revolutio tantum eousque continuatur, donec  $VAD$  sit in sita  $V\alpha\delta$ , constabit effecta Superficies ex arcubus  $A\alpha, B\epsilon, C\gamma, D\delta$ , similibus inter se eodem modo si planum  $VDZ$  circa axem  $VK$  revolvatur, posito quod integra peragatur conversio, produceretur Solidum quali constans innumeris circulis parallelis  $AY, BY, CY, DY$ , quorum (ut prius) radii  $AZ, BZ, CZ, DZ$ , centra  $Z$ ; positoque quod circulatio desistit in situ  $\delta\vee K$ , constituetur Solidum è Sectoribus  $AZ\alpha, BZ\epsilon, CZ\gamma$ , & reliquis inter se similibus. Cæterum prætermittenda non est animadversio quædam perquam utilis, & necessaria circa modum Superficierum, & Solidorum hoc modo resultantium dimensiones investigandi juxta methodum indivisibilium, omnium expeditissimam, & modò ritè adhibeatur haud minus certam & infallibilem. Objicit huic methodo non semel, in pererudito suo de Solidis cylindricis ac annularibus libello, doctissimus *A. Tacquetus*, eoque se putat illam destruere, quod per eam inventæ conorum, & Spherarum superficies (quantitates horum intelligo) veræ per *Archimedes* repertæ ac traditæ dimensiononi non respondent. Sit exemplo rectus conus  $DVY$ , cujus axis  $VK$ , per cujus omnia puncta transire concipiantur axi perpendiculares rectæ  $ZA, ZB, ZC,$  |  $ZD$ , &c. è quibus nempe juxta methodum atomicam com-

Fig. 9.

Fig. 10, 11,  
ponitur. 12.

ponitur ipsum *triangulum rectangulum*  $VKD$ ; & è circulis ad quas  
 ceu radios descriptis ipse *conus* conflatur. Ergò, disputat, ex ho-  
 rum circularum peripheriis *Superficies conica* componetur; quod  
 tamen veritati comperitur adversari; methodusque proinde fallax  
 est. Repono, malè calculum hoc pacto iniri; & in peripheriarum è  
 quibus *Superficies* constant computatione diversam instituendam esse  
 rationem ab ea, quâ computantur lineæ quibus *plana superficies* con-  
 stant, aut plana, è quibus corpora formantur. Nempe periphēria-  
 rum Superficiem curvam constituentium è revolutione prognatam  
 lineæ  $VD$  censerī debet è multitudine punctorum, quæ sunt in ipsa  
 lineæ genetrice  $VD$ ; quippe cum per ea singula puncta tales peri-  
 pherie transeant, nec plures transire queant; quicumque sit axis, seu  
 longius distans, seu propius adjacens; axis enim solummodo, pro  
 longiore vel propiore distantia positioneque varia, dictarum periphē-  
 riarum magnitudinem determinat. Verum multitudo linearum ex  
 quibus planum  $DK$  supponitur constare, planorumque quibus  
 Solidum  $DVY$  constat, è numero taxanda est punctorum in axe  
 $VK$ ; nec enim plures intra terminos  $VK$  parallelæ, ipsi  $VK$  perpen-  
 diculares, rectæ, vel plura talia parallela plana duci possunt, quam  
 horum punctorum multitudini æquinumera. Quod observando *discrimen*  
 (sedulo perpendendum) omnem devitabimus errorem, & *cur-  
 varum hujusmodi rotatu genitarum Superficerum* facillimo, reor,  
*omnium quos rei natura subministrat modo perquiremus.* Illum com-  
 monstrabo. Pro reperienda v. g. dimensione *curvæ superficiei* lineæ  
 $VD$  circa axem  $VK$  revolutione, concipiatur ipsa  $VD$  in directum  
 extendi, ita scilicet ut ei exarquetur recta  $VD$ ; & ad ejus omnia  
 puncta rectæ concipiantur applicari ipsi  $VD$  perpendiculares, & pe-  
 ripheriis circularibus, è quibus *Superficies* curvæ conflatur, ordine  
 pares; singulæ singulis, puta  $AX$  ipsi  $AY$ , &  $CX$  ipsi  $CY$ , ac  
 ita continuo. Erit ex his parallelis rectis constitutum planum  $VDX$   
 æquale *dictæ curvæ superficiei*; hujusque partes illius partibus re-  
 spectivis. Sin loco *peripheriarum* applicentur ipsarum respectivi radii  
 $AZ, BZ, CZ$ , & reliqui; spatium ex his rectis constitutum (quæ  
 sanè proportionali cum alteris serie procedunt) se habebit ad *curvam  
 Superficiem*, ut *circuli cujusvis radius ad ejus circumferentiam.* Un-  
 de siquâ ratione deprehendi possit *Summa radiorum per omnia lineæ  
 genetricis puncta transeuntium* (hoc est si spatii  $VDZ$  dimensionem  
 reperire contigerit) eo statim innotescet *curvæ Superficiei dimensio.*  
 In exemplum, facilitatis ergò, proponatur *conica Superficies*  $DVY$ ,  
 è rotatu procreata rectæ  $VD$ , circa axem  $VK$ . Ad rectam  $VD$  ap-  
 plicentur

Fig. 10, 11,  
12.

plicentur rectæ  $AZ, BZ, CZ, DZ$  ad ipsam  $VD$  perpendiculares, & æquales singulæ singulis in cono circulatorum radiis per easdem literas designatis; fiet autem in hoc casu *Spatium*  $VDZ$  triangulum, quia rectæ  $AZ, BZ, CZ$  æqualiter à se distantes æqualiter crescunt, id quod trianguli applicatis omnino proprium est. Hujus autem trianguli, ex datis altitudine  $VD$  & base  $DZ$ , dimensio in promptu est. Quod si fiat ut *circuli radius*: *Ad circumferentiam ipsius*, ita *triangulum*  $VDZ$  *ad quartum*, erit hoc quartum æquale *Superfiei conicae propositæ*. Eodem planè modo perquam faciliè *Sphæra, Sphæricarumque portionum Superficies* (nec, datis & præcognitis iis quæ requiruntur, alias quaslibet hoc modo natas) investigare licet. At mihi propositum est generalioribus tantum inhærere. || Hanc autem magnitudinum genesin æmulatur, & affinitate quâdam contingit iste modus, quum circa rectam lineam, (aut quidem circa quamvis aliam) similes innumeræ lineæ, vel figuræ parallelo juxta se situ dispositæ taliter constituuntur, ut singulæ centrum suum habeant in dicta linea, quæ proinde tanquam axis rationem subit, ac talis denominatur. Quomodo, e. c. in *cylindris obliquis*, inque *conis Scalenis* circuli circa lineam quandam rectam consistunt; quæ propterea dicitur ipsorum *axis*, quoniam in ea circulatorum parallelorum *centra* existunt. Sed cum motus ita distortos natura non capiat (saltem juxta modum operandi simplicem quem nunc supponimus) & quia possunt hujusmodi magnitudines ut modis aliis genitæ facilius concipi, de iis abstinemus. Neque non de magnitudinum per motus simplices effectione sufficiet hæcenus differuisse. ||

## LECT. III.

**Q**uomodo per motus simplices progressivum, & conversivum effecta concipiantur magnitudines, & qualia generationes istas consequuntur symptomata (nonnulla saltem præcipua) con-  
nisi sumus exponere ad compositos nunc, & concurrentes, eidem proposito servientes, motus accingimur; quorum in effectis discernendis velocitates, secundum quas simplices peraguntur motus, omnino, vel cum primis considerandæ sunt; quarum in generatione per motus simplices nulla prorsus habetur ratio. Per eundem enim motum simplicem seu velocior is sit, seu tardior eadem magnitudo, quamvis non eodem temporis intervallo, producitur; idem nempe *circulus* ex ejusdem rectæ circa punctum in ea fixum, eadem *Sphæra* ex Semicirculi circa *diametrum* rotatu; quamvis ut hæc fiant eo magis aut minus expectandum sit, quo segnior aut citatior supponitur ea progenerans motus. Verum in generatione per motus compositos iisdem manentibus lationis modis, prout unius aut plurium variatur velocitas, nedum specie, sed etiam quantitate diversæ magnitudines emergere solent, positione saltem perpetuò differentes. Ut si recta AB per rectam AC parallelo deferatur æquabili motu; & simul punctum M in AB descendat uniformiter; vel simul recta AC parallelo quoque uniformi motu descendens ipsam AB promotam interfecet in M; ex ejusmodi motuum compositione vel concursu produ-  
cetur recta linea AM. Quòd si eodem, etiam quoad velocitatem manente motu rectæ AB, immutetur in velocitate motus uniformis puncti M, vel rectæ AC, ita quidem punctum M jam eodem tempore pervenerit ad  $\mu$ , vel AC secet ipsam AB in  $\mu$ , describetur hoc motu alia recta  $A\mu$  à priore AM positione diversa. Sin verò, manente rursus eodem motu rectæ AB, pro motu puncti M, vel rectæ AC uniformi substituatur motus, quem vocant, æqualiter acceleratus, ex ejusmodi compositione, vel concursu fiet linea  
parabolica

parabolica  $AMX$  vel etiam aliter posita  $A\mu Y$  (prout hic motus acceleratus gradu ponitur alius ac alius.) Quod si quâpiam aliâ ratione crescere concipiatur, aut minui dicti puncti vel lineæ velocitas alia progignetur inde, pro ratione *hypothesis*, diversa species magnitudinis. In his conspicitur exemplis quod eodem subinde recidant *compositio motuum et concursus*, quod exinde quidem contingit, quia rectæ cujuspiam parallelo motu latæ singula puncta rectas describunt sibi parallelas; unde fit ut perinde sit an punctum ejus aliquod in ipsa fixum deferatur cum ea, vel solum per lineam ejus directioni parallelam, ut nempe utrum punctum  $M$  in  $AC$  fixum cum ea deferatur, an liberè decurrat per rectam  $AB$  eadem velocitate. At sæpe non ita facile per horum utrumlibet modum *magnitudinum generatio* declaretur, sit enim recta  $AB$  æquabiliter rotata (hoc est, ita ut temporibus æqualibus æquales efficiat angulos) et simultaneè punctum  $M$  ab  $A$  in ipsa recta  $AB$  continuo motu feratur, etiam uniformi; ex ista *motuum* compositione linea quædam producet, *helix* scilicet *Archimæda* (nam talia consultò proponimus exempla, quò *celebrium apud Mathematicos magnitudinum obiter naturam insinuem*, et instillem minùs ad hæc exercitatis; id transcurrere moneo) cujus generatio per nullos, opinor, mobilium concursus, liquidò commodèque satis explicetur; ita nimirum ut motuum istorum, vel eorum quantitatem determinantium angulorum, seu linearum, ratio, quantitasve dignoscantur. Generari quidem poterit è concursu paralleli motus rectæ  $AC$ ; vel circularis motus rectæ  $BA$  circa Centrum quodvis  $B$ , concursu cum prædicto regulari motu circa Centrum  $A$ ; at quæ sit tum futura rectarum  $AM$ ,  $A\mu$ ; vel angulorum  $ABM$ ,  $AB\mu$  quantitas difficilè constabit. E contra, si recta  $BA$  circa Centrum  $B$  motu rotetur uniformi; et simul recta  $AC$  per  $AB$  parallelas, & uniformiter deferatur, rectarum  $BA$ ,  $AC$  ita latarum intersectio continua lineam quandam efficiet (illam nempe, quæ quadratrix dici solet) cujus generatio non ita clarè per strictè dictam motuum compositionem expeditur, aut explicetur. Generari quidem potest per motum rectum alicujus puncti  $M$  in  $AB$  delatâ parallelas ad primò positam  $AB$ ; vel ex puncto tali in  $AC$  parallelo quoque delatâ; vel per motum puncti in  $AB$ , circa  $B$ ; vel circa  $A$  rotatâ, rectè ab  $A$  versus  $B$ , vel à  $B$  versus  $A$  decurrentis; sed hujusmodi suppositâ quâpiam motuum compositione, quænam sit rectarum  $AM$ , aut  $BM$ ; vel angulorum  $BAM$  aut  $ABM$  aut  $AMB$ , vel aliarum quarumvis magnitudinum hosce motus determinantium quantitas, aut inter se relatio, difficulter innotescat. Quæ præcipuè de causa

Fig. 14.

Fig. 15.

motuum compositionem ab ipsorum concursu secerno; quia nempe magnitudinum generatio nunc uno, nunc alio modo facilius explicatur. Verum ad illos distinctius exponendos accedo. De compositione primum. Cum autem motus duobus modis compositus intelligi possit; vel ut pluribus motibus aggregatus, vel ut de pluribus participans; de posteriore nos disertamus; quem fortè non melius quam prænobis Philosophi verbis, & exemplis enucleatum dem.

Cartes. princ. II.  
31, 32.

“Etsi autem ( inquit ille ) unumquodque corpus habeat tantum  
“unum motum sibi proprium, quoniam ab unis tantum corpori-  
“bus sibi contiguis, et quiescentibus recedere intelligitur, parti-  
“cipare tamen etiam potest et de aliis innumeris; si nempe sit  
“pars aliorum corporum alios motus habentium. Ut si quis am-  
“bulans in navi *horologium* in pera gestet, ejus horologii ro-  
“tæ unico tantum motu sibi proprio movebuntur; sed participa-  
“bunt etiam ex alio, quatenus adjunctæ homini ambulanti unam  
“cum illo materiæ partem component; et ex alio quatenus erunt  
“adjunctæ navigio in mari fluctuanti; et ex alio quatenus ad-  
“junctæ ipsi mari; et denique alio, quatenus adjunctæ ipsi terræ,  
“siquidem tota terra moveatur. Omnesque hi motus revera e-  
“runt in rotulis istis, sed quia non facile tam multi simul intel-  
“ligi, nec etiam omnes agnosci possunt, sufficiet unicum illum,  
“qui proprius est cujusque corporis in ipso considerare. Ac præ-  
“terea ille unicus cujusque corporis motus, qui ei proprius est,  
“instar plurium potest considerari; ut cum in rotis curruum du-  
“os diversos distinguimus, unum scilicet circa ipsarum axem, et  
“aliud rectum secundum longitudinem viæ per quam feruntur.  
“Sed quòd ideò tales motus non sint reverà distincti patet ex eo,  
“quòd unumquodque punctum corporis quod movetur unam tan-  
“tum aliquam lineam describat. Nec refert quòd ista linea sæpe sit  
“valde contorta, et ideò à pluribus diversis motibus genita vi-  
“deatur, quia possumus imaginari eodem modo quamcunque li-  
“neam etiam rectam, quæ omnium simplicissima est, ex infini-  
“tis diversis motibus ortam esse. Ut si linea AB feratur versus  
“CD, et eodem tempore punctum A feratur versus B, linea  
“recta AD, quam hoc punctum A describet, non minus pende-  
“bit à duobus motibus rectis, ab A in B et ab A B in CD, quàm  
“linea curva, quæ à quovis rotæ puncto describitur, pendet à  
“motu recto et circulari. Ac proinde quamvis sæpe utile sit u-  
“num motum in plures partes hoc pacto distinguere ad facilio-  
“rem ejus perceptionem; absolute tamen loquendo unus tantum

Fig. 16.

“in unoquoque corpore est numerandus. Ita *Cartesius*. Nempe cum magnitudo quæpiam exinde quod aliis modo quopiam adnectitur, illorū motus ita particeps est, ut ab eo quoad situm suum aliquatenus determinetur, iste motus hujus compositionem quasi pars ingreditur, ab exemplis posthac adjungendis res luculentius apparebit. Motus autem hoc modo componi possunt *Progressivi cum Progressivis, Progressivi cum Circumlativis, Circumlativi cum Circumlativis*; componi possunt, inquam, et decomponi modis innumeris; quorum omnium cum inire censum impossibile sit, illosque qui à regularitate deflectunt intelligere difficile sit, exponere difficilius; nos præcipuos saltem aliquos, in usu magis positos, et explicatu faciliores attingemus. Quales imprimis sunt ii qui è motibus directis et parallelis; è directis et rotativis, è pluribus rotativis componuntur; præsertim illi quos qui constituunt simplices motus omnes vel nonnulli sunt uniformes. Nam *uniformitatem nedum Respublica requirit, ac exigit Ecclesia, sed artes etiam atque scientia vehementer affectant*. Recti motus ( quibus parallelos à recta linea directos motus adnumero ) primum sibi non immerito locum asserunt, ut simplicitate præcellentes, naturæ convenientes et chari, præ cæteris utiles ac usitati. Nec ulla sanè magnitudinis est species ( nulla linea, nulla superficies; nullum corpus ) cujus generatio non è rectis peracta motibus concipiatur. Omnis, inquam, in uno plano constituta linea procreari potest è motu parallelo rectæ lineæ, et puncti in ea; omnis superficies è motu parallelo plani, et lineæ in eo ( lineæ scilicet alicujus è rectis modo jam insinuato motibus progenitæ ) consequenter et linea quævis etiam in curva superficie designata rectis motibus effici potest. Corpus autem solidum eodem modo genitum intelligatur, quatenus è superficierum genitura resultat, et quatenus ab ipsis ita genitis terminatur, ac circumscribitur. Sed quia *superficierum plerarumque curvarum*, quales hæctenus *Mathesis* excogitavit, & linearum in iis non in uno plano jacentium, generatio per alios modos commodius explicetur, neque mihi quicquam succurrit animadversione dignum quod de iis dicam, de linearum saltem in uno plano existentium, per rectos et parallelos motus generatione dispiciam. Et quidem has quod attinet, earum nulla est quæ non ex motu parallelo lineæ rectæ, punctique per eam delati producat; verum hi motus eo temperari modo debent, quem specialis lineæ producendæ natura poscit; nec refert qualem, velocitatis respectu, motum uni tribuas, ad hujus modò

diversitatem alterius diversitas ritè consequatur accommodeturque. Ut e.g. si recta Z A semper per rectam A Y sibi parallela feratur motu quolibet uniformi, vel difforni ( crescente, vel decrecente vel alternante secundum velocitatem, juxta rationem quamvis imaginabilem ) et in ea punctum aliquod M deferatur, ità tamen ut puncti motus lineæ rectæ motibus per singulas quasque temporis partes easdem proportionentur, produceretur utique linea recta. Nempe si fuerit semper  $AB : AC :: BM : C\mu$ . vel  $AB, MX :: AM, X\mu$  (posità scilicet MX ad AC parallelâ) liquet puncta A, M,  $\mu$  in una recta versari. Est enim rectæ lineæ proprietas in Elemento VI. demonstrata, quòd ad eam parallelos applicatæ rectæ lineæ suis ad designatum in ea punctum distantis proportionales in rectam lineam terminantur. Quòd si motus hi sic inter se contemperentur, ut assumptâ quâdam lineâ D habeat rectangulum ex differentia lineæ D, & ipsius BM (à puncto mobili decursæ in recta AZ) & ipsa BM ad quadratum ex AB (eodem tempore decursæ à linea AZ) rationem semper eandem progignetur *ellipsis aut circulus*; circulus quidem si ratio proposita fuerit æqualitas, & angulus ZAY rectus, *ellipsis* si secus; & in his erit D una *diameter*, situm habens in linea AZ primò positâ, à vertice A porrecta versus partes Z. Sin ità se habeant, ut rectangulum ex summa linearum D, & BM & ipsa BM semper eandem cum quadrato ex AB proportionem servet, eo composito motu procreabitur *hyperbole*; quadrata quidem illa (vel æquilatera rectangula) si ratio designata fuerit æqualitatis, & angulus ZAY rectus; sin aliter, alterius, pro rationis assignatæ quantitate, speciei; cujus *transversa diameter* æquabitur ipsi D, situm habens in ZA primò positâ à vertice A protensa versus partes averlas ab Z; & parameter ex ratione data determinatur. Quòd si perpetuò rectangulum ex ipsa D, & decursæ BM ad quadratum ex AB eandem perpetuò rationem obtinet, constabit effici *lineam parabolicam*, cujus *parameter* ex rectæ D, datæque rationis propositæ quantitate faciliè definiatur. Et in horum primo quidem casu si motus transversus per A Y ponatur uniformis, etiam motus descendens per A Z uniformis erit; in secundo & tertio si motus per A Y sit uniformis, erit motus descendens perpetuò crescens; eodemque posito quoad ultimum casum, in quo parabola fit; punctum M continuo velocitate crescet æqualiter. Nec abssimili modo quævis alia linea tali motus compositione producta concipi potest. Sed ut eò quo tendimus aliquando perveniamus; agendum videamus ecquid in *rem Mathematicam* utilitatis ex hujusmodi

Fig. 17.



modi supposita linearum generatione poterimus indipisci. Simplicitatis autem & perspicuitatis causâ supponamus alterum ex his motibus, rectæ nimirum parallelismum servantis, esse semper uniformem, & quænam ex alterius quoad velocitatem generalibus differentiis generales emergant linearum productarum affectiones adnitamur elicere. Adnitamur inquam, ac proxima lectione.

## LECT. IV.

Propositum est nobis è compositione motuum (qualem proximè descripsimus) emergentes linearum affectiones indagare ac exponere. Quorsum imprimis methodi causâ repeto si recta AZ per rectam AY sibi perpetuò parallela feratur uniformiter, et in ea quoque punctum M uniformiter deportetur, quâvis velocitate, linea recta proveniet. Sumantur enim duæ quævis lineæ mobilis AZ positiones, ad B scilicet & C; & quia motus per AY ponitur uniformis, erunt decursa spatia AB, AC ad se, ut *Tempora*; sed et ob motum uniformem puncti M etiam rectæ BM, CM se habebunt ut eadem tempora; est igitur AB. AC :: BM. CM. Unde liquet puncta A, M, M in una recta linea existere. Parique ratione constat idem de punctis omnibuscunque, quibus punctum M per totum suum cursum insistit, aut coincidit. Supponatur secundo punctum M motu continuo crescente deferri (juxta quamlibet velocitatis rationem, regulari modo quocunque nil interest, an irregulari) aio *suppositionem hanc consecrari progenitarum linearum quas apponemus proprietates generales* (quales uni tali linearum generi convenientes certè præstat ex unimoda communi generatione simul universas elicere, quàm de singulis, ut passim fieri solet, singulas separatim ostendere.) Notetur interea, quòd brevitatis causâ motum parallelum uniformem rectæ AZ per AY appellabo subinde *motum transversum*; puncti verò moventis ab A in linea AZ motum vocitabo *descensum*, aut *motum descendantem*; habito scilicet ad figuram exhibitam respectu. Item, quòd, ob motus per AY et ei parallelas uniformitatem, possit ea cum ipsius partibus motus tempus, et ejus partes repræsentare. Jam ad dictas proprietates expendendas accedo. I. Hoc

Fig. 19.

I. Hoc modo (per motum nempe transversum uniformem, & descensivum continuo crescentem) progenita linea per omnes sui partes curva evadet. || Accipiantur enim in ipsa tria quælibet puncta M, N, O; per quæ transeant BZ, CZ, DZ ad AZ parallelæ, & per puncta M, N ducatur recta MNK. Et quia recta MN gignitur è motu composito transverso per BC (vel huic parallelam MG) & descendente per AZ, uniformi utroque; transversus autem per MG est prorsus idem cum transverso, quo linea proposita MNO describitur; patet velocitatem descendentis motus uniformis rectam MN gignentis minorem esse velocitate, quam motus itidem descendens, lineam MNO describens, habet in N (etenim nisi motus hic velocior jam sit illo, cum continuo crescere ponatur, in toto tempore descensus per GN illo tardior fuisset, adeoque nunquam eodem tempore spatium æquale transgisset, nec una cum eo pertigisset ad punctum N) ergo motus hic inæqualis & increscens per tempus motus uniformis CD continuatus (quo nempe gignitur linea NO) majus spatium emetitur, quam uniformis motus descendens, quo MN. ad K protractus describitur, eodem tempore CD; (liquet enim eodem tempore à majore vi crescente majus spatium peragi, quam à minore neutiquam crescente) quare linea HO major est quam HK; adeoque tria puncta M, N, O non existunt in eadem recta linea; quod cum tribus quibuscvis lineæ MNO punctis conveniat, abunde patet eam esse nullibi rectam, sed per omnes sui partes incurvatam, & inflexam.

II. Hinc emergit *Corollarium*; velocitas motus uniformis descendentis, quo curvæ MNO subtensa quævis (ut MN) describitur, existente scilicet communi transverso motu uniformi quo ipsa, ejusque arcus fiunt, minor est velocitate, quam motus descensivus increscens habet ad communem utriusque terminum N.

III. Hujusce curvæ subtensa quælibet (ut MO) intra *summum arcum* (versus partes AZ) tota cadit, & producta tota cadit extra lineam MNO.

Nam si sumatur in arcu MO punctum quodvis N, & connectantur rectæ MN, NO liquet totam MO intra rectas MN, NO jacere, & proinde intra curvam MNO. Tota verò, si producat, extra lineam MNO cadit, quia nusquam alibi ei occurrit, uti mox ostensum. ||

Hoc accidens de circulo speciatim demonstrat *Euclides, de sectionibus conicis Apollonius; de cylindricis Serenus.*

IV. Patet

*Elem. III. 2.*  
*Apoll. I.*  
*Seren. I. 8.*

IV. Patet curvam propositam esse convexam, aut concavam ad easdem partes (convexam versus partes superiores vel exteriores  $AY$ , concavam introrsum, aut deorsum versus  $AZZ$ ) nam hoc ipsum, fore convexum aut concavum ad easdem partes, nil omnino designat aliud, quam à nulla recta linea præterquam duobus punctis secari; nec aliò recidit, quam initio libri de sphaera & cylindro tradit *Archimedes*, lineæ ad easdem partes cavæ definitio. Perspicuum est v. g. ut linea  $MN$  duobus in punctis  $M, N$  curvam  $MNO$  secans ei rursus occurrat, ut puta in  $K$ , debere curvam  $MNO$  reflecti, versusque partes  $AY$  recurvari; id quod modò demonstratum est non posse contingere. Quapropter ipsa linea versus easdem partes convexa est, seu concava.

V. Apertissimè constat lineas quasvis rectas (ut  $BZ, CZ$ ) generatrici  $AZ$  parallelas propositam curvam secare (modò contineantur intra terminos motûs per  $AY$ ; quia curva per harum quamvis indefinitè promotam descripta censetur) addo quod harum quælibet curvam in uno tantum puncto secat. || Id patet, quia recta generatrix  $AZ$  per unicum duntaxat instans temporis durat in situ quovis uno, seu  $BZ$ ; simulque pertingit ipsam  $BZ$ , ac deserit; præterque punctum unum  $M$  in  $BMZ$  reliqua cuncta lineæ curvæ puncta sunt in parallelis ad  $BZ$ . Ergò liquidum est ipsam  $BZ$  in uno tantum puncto curvam secare. || Hoc ipsum de parabola, & hiperbola speciatim ostendit *Apollonius*; de sectionibus conoideon *Archimedes*. *Apoll. I. 26.*  
*Arch. de Conoid.*  
*& Sph. 16.*

VI. Non dissimili modo patet ad  $AY$  parallelam quamvis, (qualis  $PG$ ) unico puncto propositam curvam attingere. || Quòd semel occurrat (modò contineatur intra limites descensus per  $AZ$ ) patet, quia punctum mobile continuò descendens, indefinito progressu, eam indefinitè protensam aliquando trajiciet; nec in eo tamen præterquam ad unum temporis momentum perdurat. || Videatur hoc de sectionibus conicis ostendens *Apollonius*. I. 19.

VII. Patet omnes curvæ subtenfas rectas cum  $AZ$  & ei parallelis, si producantur, concurrere.

Quòd enim subtenfa quævis, ut  $MN$ , uni parallelarum alicui, ut  $BR$ , occurrit, ibi scilicet ubi ipsa curvam secat, exinde manifestissimum est, quòd tota curva per parallelum dictæ rectæ motum describitur. Ergò, cum uni occurrat, omnibus occurrat; quæ enim uni parallelarum

larum æquidistat recta, pariter omnibus æquidistat, ut in elemento primo demonstratur.

L. 22.

Operæ pretium existimavit *Apollonius* hoc de parabola, & hyperbola speciatim demonstrare.

L. 24, 25.

VIII. Simili modo patet rectas quascunque curvas tangentes una tantum excipitur, ad extremum linearum recurrentis. Vid. 18. hujus. Iisdem parallelis occurrere. || Etiam hoc, quoad *sectiones conicas*, uno vel altero *Theoremate* demonstravit *Apollonius*.

IX. Quinimò rectæ quævis ipsam *AZ* secantes (infra punctum *A*, supraque limitem, siquis erit, motus descensivi) curvam secabunt.

L. 27, 28.

Cum enim omnes ipsi *AZ* parallelas secent etiam infinitè productæ curvam secent oportet. *Hujusmodi Symptomatis demonstrationi in sectionibus conicis* laboriosam operam impendit *Apollonius*.

X. Porro liquet applicatas ad rectam *AY*, ipsi *AZ* parallelas (quas nempe propositæ curvæ sinus versos appellare fas erit minorem inter se rationem habere (minores cum majoribus comparando, seu minores antecedentium loco ponendo) quam habent respectivæ ipsius *AY* partes, iisdem temporibus decursæ (quas & curvæ propositæ sinus rectos appellare nil dubitem.) Nempe *BM* ad *CN* minorem rationem habet, quam *AB* ad *AC*, vel *BM* ad *CF*; quia  $CN \sqsubset CF$ . || Hoc de circulis, & aliis curvis speciatim reperitur passim ostensum.

Ad sequentia notandum, quod si recta transversim & parallelis mota retrogradè (à *D* puta versus *A* per *DA*) moveri concipiatur, ab aliquo curvæ propositæ puncto, velut *O*, incipiens, eademque semper ratione dictum punctum ab *O* ascendens quoad velocitatem decrescat, quâ ad ipsum *O* descendens increverat, eadem curva producat. Quidni? Cum idem motus sit, inversè tantum consideratus.

XI. Supponatur rectam lineam *TMS* propositam curvam in puncto *M* tangere (sic ut eam nempe non secet) occurratque tangens hæc rectæ *AZ* in *T*, ducaturque per *M* recta *PMG* ad *AY* parallela; dico velocitatem puncti descendens, eoque motu curvam describens, quam habet ad contactum *M*, æquari velocitati, quâ recta *TP* describetur uniformiter eodem tempore, quo recta *AZ* fertur per

per AC vel PM. ( vel, quòd eodem recidit, dico quòd velocitas puncti descendens in M ad velocitatem quâ fertur recta AZ se habet, ut recta TP ad PM. ) Sumatur enim ubivis in tangente punctum aliquòd K, & per ipsum ducatur recta KG, curvæ occurrens in O, parallelis autem AY, & PG in D, & G. Et quia tangens TM duplici concipiatur uniformi motu descripta, altero rectæ TZ per AC vel PM parallelas delatæ, altero puncti descendens à T per TZ; & sit horum motuum alter per AC, vel PM communis vel idem cum illo quo curva describitur; cum TZ est in situ KG, erit AZ in eodem; ergò cum punctum à T descendens fuerit in K, erit punctum ab A descendens in curvæ cum KG intersectione O ( nec enim, ut antea deductum est, alibi recta KG curvam secat ) est autem punctum O infra K quia tangens extra curvam tota versatur. Jam si punctum K ponatur supra contactum versus T, quoniam tum OG minor est quàm KG, liquet velocitatem puncti descendens, quo curva describitur, in curvæ puncto O minorem esse velocitate motûs uniformis descendens; quâ tangens efficitur; quoniam illa semper increscens eodem tempore ( per GM repræsentato ) minus spatium transigit, quàm hæc minimè crescens; at eadem continuò perseverans; illa scilicet rectam OG hæc rectam KG conficit. Contra vero si punctum K infra contactum ad partes S existat, quoniam OG tum major est quàm KG, patet velocitatem puncti descendens, quo curva fit, in puncto O majorem esse velocitate motûs uniformis itidem descendens, quo tangens efficitur; quia motus iste, continuò decrescens eodem per GM tempore, majus peragit spatium OG, quàm hic minimè decrescens, at in eodem tenore persistens, conficit, ipsum nempe spatium KG. Ergò cum velocitas curvam describens puncti quovis in curvæ puncto supra contactum versus A minor sit velocitate motûs per TP; quovis autem in puncto infra contactum eadem major; liquet in ipso contactu M ei penitus exæquari. Q.E.D.

Fig. 20.

XII Hujus conversa, consimili discursu, rem brevius exponendo, demonstretur. Nempe, si velocitas puncti descendens ab A in aliquo curvæ puncto M æquetur velocitati, quâ punctum T uniformiter latum, rectam TP describeret tempore PM vel AC ( vel sit velocitas motûs descendens ad M ad velocitatem motûs transversæ, ut TP ad PM ) recta TMS curvam AMO tanget ad M.

Nam sumpt'o quovis in recta  $TS$  puncto  $K$ , & ductâ  $KG$  ad  $AZ$  parallêlâ; quoniam versus partes  $AT$  velocitas ascendentis puncti, curvam efficientis, semper decrefcit ab  $M$  ad  $O$ ; illi verò ex hypothefi par velocitas puncti rectam  $MT$  gignentis haud decrefcit ab  $M$  ad  $K$ , fitque tempus  $MG$  commune, erit spatium  $GO$  minus quàm  $GK$ ; unde punctum  $K$  erit extra curvam. Item, quia versus alteras partes, velocitas descendentis, quo curva fit, increfcit semper ab  $M$  versus  $O$ ; æqualis autem ei velocitas, quâ recta  $MS$  fit, haud crefcit ab  $M$  ad  $K$ ; idémque fit rursus tempus  $MG$ , liquet rectam  $GO$  excedere rectam  $GK$ ; & idcirco punctum  $K$  fupra curvam exiftere. Quare manifefturn eft omnia dictæ rectæ puncta extra curvam exiftere; & eam proinde curvam contingere: *Q. E. D.*

XIII. Ex hisce ftatim confequitur, hujusmodi curvas ad unum punctum ab una tantum recta contingi.

Nam tangere ponatur recta  $MT$  curvam  $AMO$  ad  $M$ ; & fi fieri poteft altera  $MX$  etiam tangat. Ergò eodem tempore, eâdem velocitate (illa fcilicet, quæ puncti curvam defcribentis ad contactum  $M$  acquifitæ velocitati æquatur) defcribetur utraq; recta  $XP$ ,  $TM$ ; quare  $XP$ ,  $TP$  æquales erunt, totum & pars: *Q. E. A.* Ergò non tanger altera præter pofitam  $MT$ . || *Hanc fpeciatim de circulo demonftravit Euclides; de Sectionibus Conicis Apollonius, de lineis aliis alii. Exhinc Lucrum emergit haud alpernandum, quòd eâdem operâ propofitiones de tangentibus inverfe demonftrantur.* Nempe fi determinetur angulus  $PMT$  (vel alter quifpiam quem recta pofitione data cum tangente facit ad punctum curvæ defignatum) aut fi determinetur quantitas rectæ  $PT$  (vel fimilis cujufpiam alterius à puncto in data pofitione recta defignato per tangentem interceptæ) eo tangens determinabitur. Et permutatim, fi tangens fitu determinetur, angulorum atque linearum ejufmodi quantitas indè dignofcetur. Adeoque parceretur operæ, qualem insumperunt plerique tales propofitiones inverfas demonftrandî. Quod & eo magis obfervatu dignum eft, quia fæpe talium inverfarum propofitionum una quàm altera longè promptius invenitur, atque facilius demonftratur. Cujus obfervationis, nifi longius evagari nollem, in promptu forent *Specimina*.

XIV. E dictis inferitur puncti defcendentis velocitates in duobus quibufvis defignatis curvæ punctis ad fe proportionem habere reciproce

com-

*Eucl. III. 16,  
17.  
Apoll. I. 32, 33,  
34, 35, 36.*

compositam è rationibus applicatarum ab istis punctis ad rectam AZ (ipsi scilicet AY parallelarum) & interceptarum à tangentibus ad ista puncta ac dictis applicatis (vel, rationem velocitatum æquari rationi applicatarum ex interceptarum ratione subductæ.)

Nempe si duæ rectæ MT, NX curvam tangent ad puncta M, N; protractæ ZA occurrentes in T, X; & applicentur NP, NQ ad YA parallelæ, velocitatum ad puncta, M, N proportio componetur è proportionem ipsius TP ad PM, & ipsius QN ad QX. Nam velocitas in M ad velocitatem uniformem per AY se habet ut TP ad PM; & velocitas ista uniformis se habet ad velocitatem in N, ut QN ad QX. Ergo velocitas in M ad velocitatem in N ex his duabus rationibus PP ad PM, & QN ad QX componetur. Notetur à concursu tangentium ductâ FE ad AY, parallelâ; fore TE, XE = TP . PM ÷ QN . QX.

Fig. 21.

XV.. Obiter interjicio generalem hinc & bene facilem consequi *Problematis istius solutionem*, quam tanti fecit, & cui tantum laborem impendit *Galilæus*, quàmque *Torricellius* pronunciat eum quàm optimè & ingeniosissimè reperisse. Rem ità proponit *Torricellius* (nam ipse *Galilæus* ad manum non est) propositâ quâvis parabolâ, cujus vertex A oportet punctum aliquod sublime reperire; è quo si grave cadat usque ad A, & ex puncto cum impetu jam concepto horizontaliter convertatur, ipsa *propositam parabolam* describat (notetur, quòd motus descensivus parabolam describens non è puncto sublimi, sed ab ipso puncto A censetur inchoare.) Huc recidit *Problema*, *Galilæi* suppositis insistendo, ut determinentur particulares velocitates motuum, uniformis horizontalis, seu transversi, & æqualiter crescentis descensivi quorum è compositione descripta concipitur exhibita parabola. Nos illud, quæcunque sit crescentis descensivi motus ratio, quicunque modus, generaliter exequemur; specialem illum de *parabola* casum in exemplum subjunguri. || Reperiatur in recta AZ (quæ sanè curvæ diameter est) punctum aliquod, ut P, à quo si ordinatim applicetur PM, & ducatur tangens MT, rectæ AZ occurrens in T, sit intercepta TP æqualis ipsi PM; tum sumatur in ZA protractâ recta AS = AP. Dico factum.

Fig. 22.

Nam quoniam SA = AP, concipiet mobile descendens ab S in A tantum impetum, quantum ab A ad P curvam describendo (ponitur enim increscentis velocitatis motus utrobique prorsus idem) iste verò impetus æquatur impetui, quo mobile à T descendens uniformi motu percurreret rectam TP, eodem tempore quo recta AZ uniformiter

Fig. 22.

lata, pèrque motum istum in curva describenda conspirans, percurrit rectam P.M. Cùm igitur sint TP, PM ex constructione pares, adeoque velocitates motuum, quibus simul peraguntur, æquales; etiam motus descensivus in P, vel M æquabitur motui transverso, curvam describenti, hoc est motus ab S ad A velocitas in A eidem æquatur. Ergo punctum S est id ipsum, quod inveniri debuit, & absolutum est propositum. | Exemplo sit *parabola*, quæ facta concipitur ex motu uniformi horizontali, & descensivo pariter accelerato, tum punctum P ita faciliè per *Analysin* investigatur. Sit recta R *data parabola rectum latus*. Est igitur ex *parabola* natura,  $R \times AP = PM q = TP q$  (ex hypotheli modi nostri generalis.) Item, ex *parabola* nota proprietate est  $TP q = 4 AP q$ . Ergo est  $R \times AP = 4 AP q$ . Adeoque  $R = 4 AP$ ; vel  $\frac{1}{4} R = AP = SA$ . Nimirum ita *Galilæus* determinavit. In hoc autem casu puncta T, S coincidunt. Quòd si rursus gravia juxta *triplicatam temporum rationem* velocitate crescendo descendant, adeoque motus ipsorum talis cum uniformi transverso compositus *parabolam cubicam* describat, & sit R istius curvæ *parameter*, erit eo in casu  $SA = \sqrt{\frac{Rq}{27}}$  nam ex hujusce curvæ proprie-

tate est  $R q AP = PM \text{ cub.}$  Et ex hujus regulæ generalis præscripto est  $PM = TP$ , adeoque  $PM \text{ cub.} = TP \text{ cub.}$  Denique quoniam in hujusmodi *parabola* tangentis intercepta semper trifecatur à vertice (nimirum ut sit  $AP = \frac{1}{3} TP$ ) est  $TP \text{ cub.} = 27 AP \text{ cub.}$  Erit igitur  $R q AP = 27 AP \text{ cub.}$  Adeoque  $R q = 27 AP q$ ; vel  $\frac{Rq}{27} = AP q = SA q$ . In reliquis simili ratione procedentes assequemur propositum. Possent opinor & hinc nedum pleræque *Galilæi propositiones* huic affines, & hanc attingentes materiam utcunque deduci, sed & generaliores reddi, vel ad alia curvas omnigenas extendi. Verùm parco pluribus, hoc *specimine* (quoad ista) contentus; huc non nisi per transcursum adducto. Ad alia pergo prædictis cohærentia.

XVI. Si ad rectam lineam applicetur *plana superficies*, cujus singulæ quæque partes applicatis ad istam rectam parallelis interceptæ proportionales sint rectis ad rectam AY simpliciter divisam applicatis (ad AZ nempe parallelis.) Hujusce superficiæ ad parallelogrammum æquealium, super eadem base constitutum, proportio proportionem indicabit ipsarum AP; TP, à puncto P vertici, tangentique interjectarum.

Ut



Ut si ad rectam  $\alpha\delta$  applicetur plana superficies  $\alpha\delta\mu$ , & utcunque divisâ A D punctis B, C, similiterque dicisâ rectâ  $\alpha\delta$  punctis  $\epsilon, \gamma$ , fuerit ut B M ad C M ita superficies  $\epsilon\alpha\mu$ , ad superficiem  $\gamma\alpha\mu$ , & hoc in comparationibus universis taliter institutis contingat; *completo parallelogrammo  $\alpha\delta\mu\phi$ , se habebit recta A P ad rectam T P ut superficies  $\alpha\delta\mu$  ad parallelogrammum  $\alpha\delta\mu\phi$ .* Et enim si recta  $\alpha\delta$  commune tempus designare concipiatur, quo recta A D motu æquabili, rectâque D M motu continuè accelerato transiguntur, recta  $\delta\mu$  bene designabit velocitatem hujus definiti temporis maximam, quam habet punctum descendens in curvæ puncto M infimo; hoc est velocitatem quâ recta T P uniformiter decurritur eodem tempore; quapropter (ut antehac commonstratum est.) *Parallelogrammum  $\alpha\delta\mu\phi$  optimè Spatium* repræsentabit, quod hâc eâdem permanente velocitate per totum tempus  $\alpha\delta$  uniformiter describitur, hoc est ipsam rectam T P. Cum igitur, ex hypotheseis præstratâ conditione, figura  $\delta\alpha\mu$  rectam D M, vel A P, repræsentet, erit ut figura  $\delta\alpha\mu$  ad parallelogrammum  $\alpha\delta\mu\phi$ , ita A P ad T P; cognitaque proinde modo quovis istâ proportionem, simul hæc innotescet; & reciprocè. Exemplo res manifestior evadet uno, vel altero. Proposita curva sit *parabola quadratica*, seu in qua rectæ B M, C M se habent, ut quadrata ex A B, A C, hoc est ut quadrata ex  $\alpha\epsilon, \alpha\gamma$ . Ergo si figura  $\alpha\delta\mu$  sit triangulum, id optimè quadrabit huic negotio. Nam eo supposito semper triangula  $\epsilon\alpha\mu, \gamma\alpha\mu$  proportionalia erunt quadratis ex  $\alpha\epsilon, \alpha\gamma$ , hoc est rectis B M; C M. Quoniam verò triangulum  $\delta\alpha\mu$  parallelogrammi  $\delta\alpha\phi\mu$  est subduplum, erit recta A P quoque rectæ T P subdupla; quod ita se habere demonstratum habetur in *conicis elementis*, & passim agnoscitur. Sit rursus curva A M M *parabola cubica*; & quoniam in ea rectæ B M, C M se habent ut cubi rectarum A B, A C, hoc est ut cubi rectarum  $\alpha\epsilon, \alpha\gamma$ ; & si superficies  $\alpha\delta\mu$  fuerit *complementum semiparabolice quadratice portionis, trilinea  $\epsilon\alpha\mu, \gamma\alpha\mu$  cubis ex  $\alpha\epsilon, \alpha\gamma$  proportionalia* erunt (ut à Pappo, ac aliis ostenditur, & ex Archimidea parabola dimensione quàm facillimè deducitur) itaque negotio proposito quàm rectissimè adaptetur *parabola quadratica*; cùmque constiterit aliundè tum figuram  $\alpha\delta\mu$  subtriplam fore parallelogrammi  $\alpha\delta\mu\phi$ ; erit etiam juxta regulæ jam assignatæ præscriptum recta A P quoque subtripla rectæ T P. De qua conclusione satis convenit inter *Geometras*.

Hæc posthæc  
γεωμετρικῶν  
τεχνῶν demon-  
strata habentur.

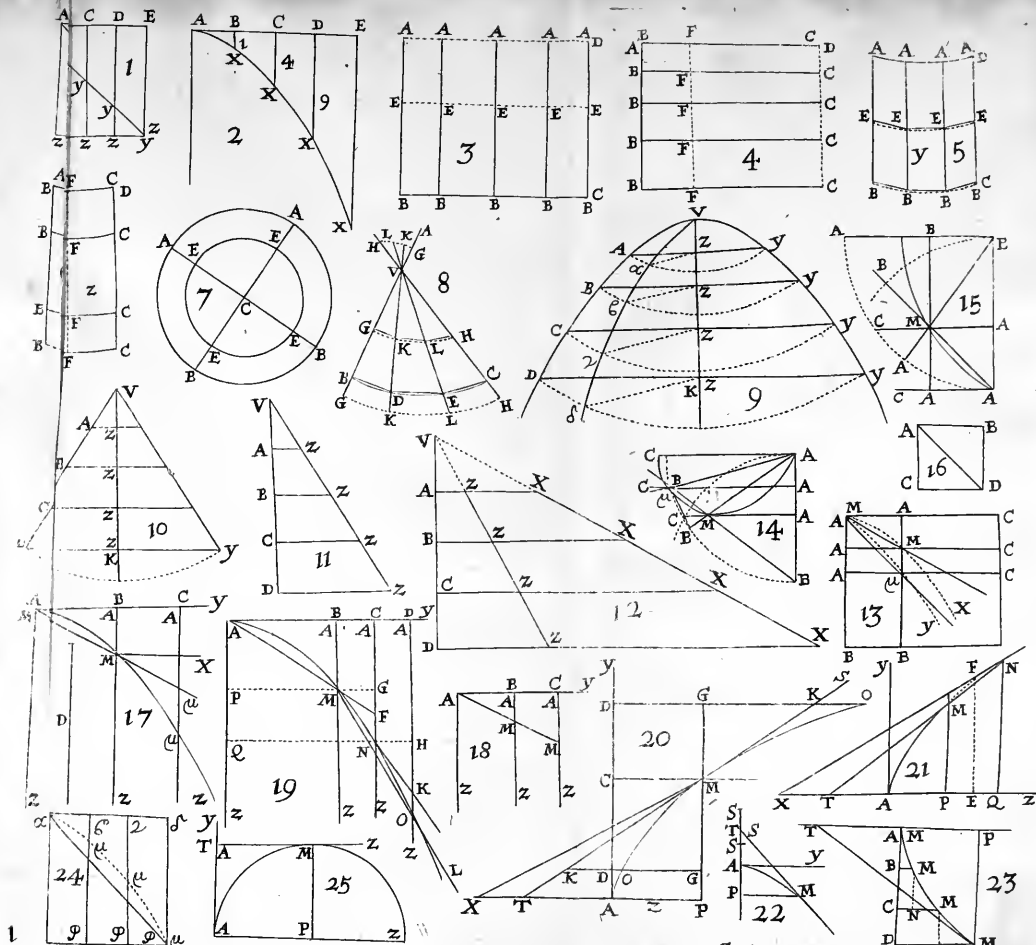
Fig. 23, 24.

XVII. Huic suppar modus dictas rectas AP, TP comparandi tali *Theoremate* continetur: Si ad rectam aliquam lineam (hoc est ad ejus singula quæque puncta) applicentur rectæ lineæ parallelæ, ad rectam AD consimiliter divisam applicatarum differentiis proportionales, resultantis hinc plani ad parallelogrammum æque altum, ad eandemque basin positum, rectarum AP, TP proportionem exhibebit. Ut si rectæ AD,  $\alpha\delta$  similiter (in partes scilicet æquales indefinite multas) dividantur; & rectæ  $\epsilon\mu$ ,  $\gamma\mu$ ,  $\delta\mu$  rectis BM, NM, OM (quæ differentiæ sunt rectarum ad AD applicatarum, incipiendo à puncto A) proportionales sint, erit ut figura  $\alpha\delta\mu$  ad parallelogrammum  $\alpha\delta\mu\phi$ , ita AP ad TP. Cum enim recta quæpiam ex applicatis ad AD; puta *v. g.* DM æquetur omnibus seipsâ minorum differentiis (ipsis nempe BM, NM, OM) & trilineum  $\alpha\delta\mu$  constituatur è rectis  $\epsilon\mu$ ,  $\gamma\mu$ ,  $\delta\mu$  eadem proportionem crescentibus; ut & recta CM æquatur ipsis BM, NM; & ei respondens trilineum  $\alpha\gamma\mu$  quasi conflatur è parallelis  $\epsilon\mu$ ,  $\gamma\mu$  parî ratione crescentibus; & hoc semper eveniat; omnino patet trilinea  $\alpha\delta\mu$ ,  $\alpha\gamma\mu$ ,  $\alpha\epsilon\mu$  rectis DM, CM, BM proportionari; proindeque modum hunc in priorem recidere; nec ab eo reipsâ differre. Notetur autem hic rectas  $\epsilon\mu$ ,  $\gamma\mu$ ,  $\delta\mu$  velocitates repræsentare, quas punctum mobile curvam delineans obtinet in respectivis ejus punctis M; ut & trilinea  $\alpha\epsilon\mu$ ,  $\alpha\gamma\mu$ ,  $\alpha\delta\mu$  velocitates aggregatas exhibent ab initio ad definita respectiva temporis instantia; quibus (ut jam olim pramonitum) respondentia spatia BM, CM, DM proportionantur.

Fig. 25.

II. *preced.*

XVIII. E supradictis porrò confectatur, quòd si *Circulus*, *Ellipsis*, ejusmodique curvæ recurrentes hoc progenitæ concipiantur modo, punctum eas describens infinitam in recursûs puncto velocitatem habebit. Nempe si quadrans AFM ita generetur; quoniam tangens TM diametro AZ est parallela, nec illa proinde cum hac nisi ad infinitam distantiam convenit; ergo velocitas in M ad velocitatem uniformis motûs per AY se habebit, ut infinita recta ad ipsam PM; unde velocitas ista ad M prorsus infinita sit oportet. Ità quidem quoad hujusmodi curvas; at quoad alias ad infinitum sensim continuatas (quales *parabola* & *hyperbolæ*) descendenti puncti velocitas in quovis designato curvæ puncto finita est. Verùm his omiſſis ad alias propositæ curvæ proprietates exponendas progrediamur.





## L E C T. V.

**I**N deducendis è propositâ generatione curvarum affectionibus etiamnum progredimur.

I. *Anguli, qui sunt ab applicatis & tangentibus ad diversa curvæ puncta, sibi inter inæquales sunt; & minores sunt illi qui puncto A (scilicet vertici) propiores sunt.*

Tangant rectæ  $TM$ ,  $XN$ ; & ad  $AY$  parallelæ sint  $MP$ ,  $NQ$ ; dico fore angulum  $PMT$  minorem angulo  $QNX$ .

Nam producta recta  $TM$  occurreret ipsi  $QN$  extra curvam productæ, puta ad  $E$ . Item ipsa  $XN$  secabit applicatam  $PM$  extra curvam, puta ad  $H$ . Manifestum est autem cum puncta  $H$ ,  $N$  sint ad alias, ac alias partes rectæ  $ME$ , rectas  $ME$ ,  $NH$  sese interfecare inter parallelas  $PH$ ,  $QE$ ; quare major est angulus externus  $QNX$  interno  $QET$ , hoc est angulo  $PMT$ :  $Q.E.D.$  Fig. 26.

II. Hinc porismatis loco habetur *tangentes se interfecare inter ordinatim applicatas per puncta contactuum; velut ad F, inter PM, QN protensas.*

III. Item *angulum PTM angulo QNX majorem esse; (externum scilicet interno.)*

IV. Item patet vertici propiores applicatas (proindeque rectas quasvis aliis parallelas) curvæ obliquius incidere quam remotiores.

Cæterum ista jam olim de *Sectionibus Conicis* ostenderat Apollonius, ut in edito nuper VI *conicorum* libro est videre

V. In figura præcedente (posito applicationis angulum  $TAY$  rectum esse, vel obtusum) dico *curvæ arcum MN rectâ NH, majorem esse; rectâ verò ME minorem.*

Nam

Nam connectatur subtensa  $MN$ , ducaturque recta  $NR$  ad  $Z$   $A$  parallela. Et quoniam angulus  $XPH$  non minor est recto, erit, eo major externus,  $NHP$  obtusus. Ergo recta  $NM$  major est quam  $NH$ . Itaque magis arcus, arcus  $NH$  major est quam ipsa  $NH$ :  $Q.E.D.$

Item, quoniam ang.  $RNE$  ipsi  $XQE$  par haud minor est recto, erit  $RE \sqsubset RN$ . quare  $MR \dashv RE \sqsubset MR \dashv RN$ . hoc est  $ME \sqsubset MR \dashv RN$ . Est autem (ex *Archimedais* assumptis)  $MR \dashv RN \sqsubset$  arc.  $MN$ . ergo magis est  $ME \sqsubset$  arc.  $MN$ .

VI. Perutilis est hæc propositio in *tangentium demonstrationibus expediendis*. Etenim hinc consequatur, si arcus  $MN$  indefinitè parvus ponatur, ejusce loco alterutram tangentis particulam  $ME$ , vel  $NH$  tuto substitui.

*Speciminis* hic loco *methodum proponam generalem cycloidum omnium, & consimili modo descriptarum curvarum tangentes determinandi*, hinc petitâ demonstratione munitam.

Fig. 27.

Recta  $AY$  sibi parallelè deportata quamcunque curvam ad easdem partes convexam aut cavam,  $APX$  perambulet uniformi motu (scilicet ut æquales curvæ partes æqualibus transigat temporibus) eodémque simul tempore punctum aliquod ab  $A$  per  $AY$  etiam uniformiter feratur; ab hoc puncto taliter moto progignetur curva  $AMZ$ ; cujus ad datum quodcunque punctum  $M$  tangentem oportet determinare. Ut hoc fiat, ducatur recta  $MP$  ad  $AY$  parallela, curvam  $APX$  secans in  $P$ ; perque  $P$  ducatur recta  $PE$  curvam  $APX$  contingens; huic verò per  $M$  ducatur parallela  $MH$ ; inque hac sumatur punctum quodpiam  $R$ , & ducatur  $RS$  ad  $PM$  parallela; tum fiat ut curva  $AP$  ad rectam  $PM$  (hoc est ut unus motus uniformis ad alterum) ita  $MR$  ad  $RS$ ; & connectatur  $MS$ . hæc curvam  $AMZ$  continget. Sumatur enim in hac curva punctum quodvis  $Z$ , per quod ducatur recta  $ZX$  ad  $MP$  parallela, secans curvam  $APX$  in  $X$ , ejusque tangentem in  $E$ ; & huic parallelam  $MR$  in  $H$ ; ipsamque demum  $MS$  in  $K$ . Sit autem primò punctum  $Z$  supra  $M$  versus  $A$ ; unde recta  $PE \sqsupset$  arc  $PX$ . adeoque  $PA.PE \sqsubset$  arc  $PA.PX$  ::  $PM.PM - XZ$  ::  $PM.EH - XZ$  ::  $PM.ZH - EX \sqsubset$   $PM.ZH$ . quare permutatim erit  $PA.PM \sqsubset PE.ZH$ . est autem  $PA:PM$  ::  $MR.RS$  ::  $MH.KH$  ::  $PE.HK$ . ergo  $PE.HK \sqsubset PE.ZH$ . quare  $HK \sqsupset ZH$ . est autem punctum  $H$  extra curvam  $AZM$ , ob  $EZ \sqsupset XZ \sqsupset PM = EH$ . ergo palam est punctum  $K$  extra curvam  $AZM$  existere. Sit verò secundò punctum

punctum Z infra punctum M ; erit tum recta PE major arcu PX ; unde arc PA. PE  $\supset$  arc PA. PX :: PM. XZ — PM :: Fig. 27.  
 PM. XZ — EH :: PM. XE  $\div$  XZ  $\supset$  PM. HZ. & vicissim  
 PA. PM  $\supset$  PE. HZ. Verum ut prius ) est PA. PM :: PE. HK.  
 ergo PE. HK  $\supset$  PE. HZ ; proptereaque HK  $\supset$  HZ ; rursus  
 itaque liquet Punctum K extra curvam existere. Tota proinde recta  
 M K Z extra curvam versatur ; & eam tangit ad M : Q. E. D.  
 In transcurfu hoc . ad alias curvæ nostræ passiones revertamur.

VII. Si tangenti cuipiam ( ut ipsi M T ) parallela ducatur quæpiam EF ( à puncto nempe quopiam E in recta infra punctum T sumpto ) hæc curvæ occurrêt.

Si enim infra punctum M in curva sumatur punctum quodlibet, & ab eo duci concipiatur curvam tangens recta ; huic occurret tangens TM infra ordinatam PM. ergo recta EF eidem occurret ; at curvam prius transiliat oportet. ergo liquet Propositum. Fig. 28.

VIII. Eâdem operâ patet, si punctum assumptum E puncto T, & vertici A interjiciatur, rectum EF curvæ bis occurruram, tam supra quam infra contactum M.

Operosè connisus est Apollonius hæc de *Sectionibus Conicis* ostendere. Com. I. 27, 28.

Caterum ad penitus determinandos occursum locos *Specialis modus seu ratio motuum descendens atq; transversus cognosci debet* ; tunc eos *Analysis* statim prodet.

IX. Si duæ rectæ quævis ( HM, KN ) ad curvam propositam æqualiter inclinentur ( hoc est æquales cum ejus ad occursum tangenti- bus ( puta cum ipsis M T, N X ) angulos efficiant ) hæc extrorsum divergent, seu ad partes EF productæ concurrent. Fig. 29.

Nam ducatur subtensa NM ; hæc utiq; secundum antedicta cum ipsa AZ conveniet, puta ad O. Est ergo ang. OMH  $\supset$  ( ang. TMH = ang. XNK  $\supset$  ) ang. ONK. ergo ang. HMN  $\div$  MNK  $\supset$  2 rect. ergo rectæ HM, KN concurrunt ad partes EF. Limitandum est hoc, intelligendo pares angulos HMA, KNA ad easdem partes versari ; seu alterum alteri fore externum interno. alias cotura eveniet.

X. Si fuerit recta HM *curvæ* perpendicularis ( hoc ejus tangenti M T ) & in hac sumatur quæpiam definita HM ; erit HM minima rectarum omnium, quæ à puncto H duci possunt ad curvam. Fig. 30.  
 Apoll. I. 38. &c.

Ducatur enim quævis  $HO$  ; hæc tangenti prius occurrer, puta ad  $R$ . liquet  $HR$  majorem esse quàm  $HM$  ; multoq; magis esse  $HO$   $\sqsubset$   $HM$ ,

XI. Hinc *Circulus Centro  $H$  per  $M$  descriptus curvam contin-*  
get.

XII. Etiam inversè, si  $HM$  minima sit omnium quæ ab  $H$  ad curvam duci possunt, erit  $HM$  curvæ perpendicularis.

Nam quoniam  $HM$  minima ponitur, circulus centro  $H$ , intervallo quovis  $HS$ , majori quàm  $HM$ , curvam secabit, & proinde tangentem  $MT$ , hanc puta in  $R$ . ergo quum sit  $HR$   $\sqsubset$   $HM$ , non erit angulus  $HRM$  rectus. idem de punctis omnibus in recta  $TM$  evidens est. ergo tangenti perpendicularis non alibi quàm in punctum  $M$  cadit.

Fig. 31.

XIII. Quinetiam si recta  $HM$  minima sit omnium quæ ab  $H$  duci possunt, eiq; perpendicularis sit recta  $TM$ ; hæc curvam tanget.

Nam tangat alia, (si fieri potest)  $XM$ ; erit igitur  $XM$  ad  $HM$  perpendicularis. Unde pares erunt anguli  $HMX$ ,  $HMT$ ; totum & pars  $Q$ :  $E.A$ .

Fig. 32.

XIV. Dico porrò minimæ  $HM$  propiorem  $HN$  remotiore  $HO$  minorem esse.

Nam ducatur subtenfa  $MN$ ; hæc producta curvam transgredietur, & ipsam  $HO$  secabit, puta in  $R$ . & quoniam Angulus  $HMR$  obtusus est (major illo nempe, quem tangens cum  $HM$  constituit ad  $M$ ) erit  $HN$  magis obtusus; adeoq; recta  $HR$   $\sqsubset$   $HN$  & magis  $HO$   $\sqsubset$   $HN$ .

XV. Hinc perspicuum est Circulum quemvis Centro  $H$  descriptum, uno tantum ad easdem puncti  $M$  partes puncto curvæ occurrere; nec omnino pluries igitur, quàm in duobus punctis.

Fig. 33.

XVI. Perpendiculari  $HM$  parallelæ sint rectæ  $IN$ ,  $KO$ ; harum propior  $IN$  remotiore  $KO$  rectius incidet.

Nam per  $N$ ,  $O$  ducantur ipsi curvæ perpendiculares  $EN$ ,  $FO$ ; hæc cum ipsa  $HM$  intra curvam convenient, puta ad  $R$ , &  $P$ ; sibi verò ipsis in  $Q$ .

Liquet jam esse ang.  $FOK$  = ang.  $EPH$   $\sqsubset$  ang.  $PRQ$  = ang.  $NRH$  = ang.  $ENJ$ . Cum ergo sit ang.  $FOK$  major angulo  $ENJ$ , liquet propositum.

XXXVII.



XVII. Si à puncto quopiam H in perpendiculari H M assumpto ducantur ad curvam rectæ H N, H O ; harum propior H N, remotiore H O rectius incidet.

Nam ducantur E N, F O curvæ perpendiculares, & I N, K O ad ipsam H M parallelæ. Est igitur ang. F O K  $\simeq$  ang. E N I. Item ang. O H M  $\simeq$  ang. N H M. hoc est ang. K O H  $\simeq$  ang. I N H. quare ang. F O K + K O H  $\simeq$  ang. E N I + I N H. hoc est ang. F O H  $\simeq$  ang. E N H. Unde constat Propositum.

XVIII. Hinc patet à perpendiculari progrediendo, ( ab uno nempe puncto H ) incidentium *obliquitatem* crescere, donec ad illam devenitur, quæ *curvam* tangit, omnium obliquissima.

XIX. Porro si introrsum jam sumatur punctum H, & ab eo incidens H M sit omnium curvæ incidentium minima ; erit H M *curva* perpendicularis ; seu tangenti M T. Fig. 35.

Nam dic aliam M R tangenti perpendicularem esse. ergò H R  $\simeq$  H M. & magis H O  $\simeq$  H M. quare H M non est minima contra *Hypothesin*. Apoll. V. 32.

XX. Item si recta H M sit omnium ab H curvæ incidentium *maxima*, Apoll. V. 29. erit H M curvæ perpendicularis.

Nam Circulus Centro H per M descriptus extra curvam totus cadet. ergò si recta M T Circulum tangat, hæc magis extra curvam cadet, eamq; proinde continget. Est autem ang. H M T rectus. ergò liquet. Fig. 36.

XXI. Hinc si M T sit minimæ vel maximæ H M perpendicularis ; hæc *curvam* tanget. Apoll. V. 30, 35.

Nam si dicatur alia M X tangere ; erit ideò ang. X M H rectus, & par angulo T M H : Q. E. A.

XXII. Exhinc si recta Y M non sit curvæ perpendicularis ; in ea nulla sumi potest *maxima*, vel *minima*.

Nam si sumi posset, esset ex eo ipso Y M curvæ perpendicularis contra *Hypothesin*. Apoll. V. 31, 47.

XXIII. Si H M sit incidentium minima, & intra ipsam sumatur punctum quodpiam I ; erit etiam I M minima. Apoll. V. 30.

Fig. 37.

Cum enim *circulus centro H per M descriptus curvam introrsum* tangat, etiam magis *circulus centro I descriptus introrsum* tangat. unde liquet.

XXIV. Etiam si *HM* sit incidentium maxima, & extra ipsam accipiatur punctum quodpiam *I*, erit *IM* maxima.

Apol. V. 39.

Cum enim *circulus Centro H per M descriptus curvam extrorsum* contingat, etiam potiori jure *Circulus Centro I per M descriptus eandem extrorsus* continget. unde constat *Propositum*.

Cæterum *minimarum & maximarum* propior determinatio pendet ex speciali *curva natura*.

De hac autem Tabula jam manum auferemus; nec enim impræsentiarum hujusmodi pleraque complecti profitemur. Instituto nostro sufficit hætenus generalis cujusdam curvarum proprietates comprehendentis Doctrinæ specimen exhibuisse: qualis certè, plenior & perfectior, hæud exiguum videtur rebus Geometricis (quæ nempe circa *curvarum* proprietates & affectiones plurimum occupantur) compendium allatura. Nè dicam culpæ agnatum videri, *Logicaq;* Regulis haud admodum congruere, quæ toti cuiuspiam generi conveniunt, & quæ de communi quadam origine manant, ea quibusdam partibus adscribere, vel ex angustiori fonte derivare. Plura forsan, & abstrusiora proferemus aliquando. Nunc his superfedemus.

## LECT. VI.

**A**D easdem partes vergentium curvarum, è communi quadam generatione deductas, generales aliquot affectiones jam antea dudum exposui; illas præsertim, quas à veteribus *Geometris* observaram specialibus, quas ipsi tractant, curvis applicari. Jam non ingratum facturus videor, si complures alias (abstrusiores quidem illas, at non injucundas prorsus, aut inutiles) apposuerò; pro meo more quam concisissimè demonstratas, eâ tamen ratione quoad poterò, quæ cum primis scientifica videtur, hoc est quæ nedum conclusionum veritatem asserit, at fontes etiam aperit, unde illa promanat. Versantur autem præcipuè quæ proferemus, partim circa tangentium absque calculi molestia vel fastidio investigationem simul ac demonstrationem expeditam (è simplicioribus nempe vulgarioribusque perplexiora minúsque perspecta deducendo) partim circa multarum magnitudinum dimensiones, tangentium designatarum ope, quam promptissimè determinandas; quæ materiæ cum præ Geometricis aliis quodammodò difficiles videntur, tum non penitus adhuc (sicut aliæ quædam) occupatæ vel exhaustæ sunt, ad hunc saltem modum quod sciam nondum tractatæ. Quin è vestigiorem aggredimur, *Lematica* quædam utcunque, quorum in reliquis clarius & brevius ostendendis aliquem prospicimus usum, prælibantes.

II Sit *angulus retilineus*  $ABC$ , & datum punctum  $D$ , sit item linea  $ODO$  talis, ut per  $D$  ductâ quavis rectâ  $DN$ , sit anguli lateribus intercepta  $MN$  æqualis à puncto  $D$ , & linea  $ODO$  interceptæ  $DO$ ; erit linea  $ODO$  *Hyperbola*.

Nam ducatur  $DL$  ad  $CB$  parallela occurrēsq; ipsi  $AB$  in  $L$ ; & in protracta  $BL$  sumatur  $LZ = LB$ ; ducaturq;  $ZS$  ad  $BC$  parallela; item ducatur  $OK$  ad  $BZ$  parallela. Et ob positam  $DO = MN$ ; erit  $HO = BN$ ; ergo quum sit  $DH.HO :: (DL.LN :: DL -$   
 $DH.$

Fig. 38.

DH.LN—HO:: LH.LB::) LH.HK. erit  $DH \times HK = HO \times LH$ ; hoc est  $DL \times HK = LH \times HK = KO \times LH = HK \times LH$ . unde erit  $DL \times HK = KO \times LH$ . vel  $ZL \times LD = ZK \times KO$ . ergo constat lineam ODO esse *Hyperbolen*, cujus *Asymptoti* ZA, ZS. Brevius hoc ostendi posset, producendo rectam NDS. Nam est  $DS = DM = DO \pm OM = NM \pm OM = ON$ . Similiter quartam & nonam brevius demonstrare licet.

Fig. 38.

Quinimo si MN ad DO quamvis eandem perpetuò rationem ponatur habere (puta datam R ad S) etiam linea ODO *Hyperbola* erit; Nempe si tum fiat  $R.S::LB.LZ$ ; &  $R.S::DL.DE$ ; & per Z ducatur ZS ad BC; ac per E transeat RE ad ZA parallela, cum ZS conveniens in Y; erunt YR, YS dictæ *Hyperbola asymptoti* quod jam sufficerit innuisse.

Hinc in transcurso noto facillè confici *Problema* (quo *problematum confectio* ista *Archimedea*, ac *Vieta* ope *prima Conchoidis peracta*, ad *Sectiones conicas rediguntur*) Per datum punctum D rectam lineam ducere, sic ut anguli dati ABC lateribus intercepta ductæ rectæ pars æquetur datæ T. Nam descriptâ hyperbolâ ODO; centro D, intervallo datam T æquante describatur circulus POQ *hyperbolam* interfecans in O; & producaturn DON; fietq;  $MN = DO = T$ . Modus autem hic generalior est, & concinnior eo, quem in *Opticis* tradidimus.

Fig. 39.

IV. Sit angulus ABC, et punctum datum D; sit etiam linea OBO talis, ut per D ductâ quâpiam rectâ DN, sit anguli lateribus intercepta MN ad rectâ BC curvâque OBO interceptam MO in eadem semper ratione (puta X ad Y;) erit linea OBO *hyperbola*.

Fig. 39.

Ducatur enim recta DL ad CB parallela, ipsi AB occurrens in L; secenturque DL, BL punctis E, F, ut sit  $DL.DE::X.Y::BL.BF$ ; tum per E ducatur recta ER, ad BA; & per F recta FS ad BC parallela; concurrantque rectæ ER, FS puncto Z; denuò per punctum O ducatur OH ad AB parallela. Jam ob  $DL.DH::LN.HO::LB+BN.HO::DE \times LB + DE \times BN.DE \times HO$ . item  $DL \times KO = DE \times BN$  (nam  $DL.DE::MN.MO::BN.KO$ ) &  $DE \times LB = DL \times BF$  (ob  $DL.DE::BF.LB$ ;) erit  $DL.DH::DL \times BF + DL \times KO.DH \times BF + DH \times KO::DL \times BF + DL \times KO$ .

DE

$DE \times HO$  ergò  $DH \times BF + DH \times KO = DE \times HO$ ; hoc est  $DH \times BF + DH \times HO - DH \times BL = DE \times HO$ ; transponendo igitur est  $DH \times HO - DE \times HO = DH \times BL - DH \times BF$ . hoc est  $EH \times HO = DH \times FL$ ; vel  $EH \times GO - EH \times$  Fig. 39.  
 $HG = DE \times FL - EH \times FL$ ; quare, demptis æqualibus, est  $EH \times GO = DE \times FL$ ; vel  $ZG \times GO = DE \times FL$ ; cum itaque  $DE \times FL$  sit quid determinatum, constat lineam  $OBO$  esse hyperbolam, cujus asymptoti  $ZR, ZS$ .

V. Si  $MO$  capiatur ad alteras rectæ  $BC$  partes, etiam  $DE$ .  $BF$  ad alteras punctorum  $D, B$  partes accipi debent; uti Schema Fig. 40. monstrat; nec abludit modus demonstrandi.

VI. Confectarium. Si recta  $BQ$  angulum  $ABC$  fecet, perque punctum  $D$  ducantur utcumque duæ rectæ  $MN, XY$  rectam Fig. 41.  
 $BQ$  interfecantes punctis  $OP$  (quorum utique sit  $O$  propius ipsi  $B$ ) erit  $MN.MO \Rightarrow XY.XP$ . Nam per  $O$  descripta concipiatur *hyperbola*  $VOB$  (qualem jam mox attigimus, sic ut interceptæ rationem habeant illam quam  $MN$  ad  $MO$ ) erit igitur  $MN.MO :: (XY.XV) \Rightarrow XY.XP$ .

Coroll. Dividendo est  $NO.MO \Rightarrow YP.PX$ .

VII. Quinimò si plures lineæ  $BQ, BG$  angulum  $ABC$  fecent; Fig. 42.  
 & à puncto  $D$  projiciantur rectæ  $DN, DY$  (quæ rectas alteras interfecant ut vides; quarumque  $DN$  puncto  $B$  vicinior;) erit  $NE.MO \Rightarrow YF.VX$ .

Nam  $NE.EO \Rightarrow YF.FV$ ; &  $EO.OM \Rightarrow FV.VX$ . igitur ex æquo est  $NE.OM \Rightarrow YF.VX$ . ||

VIII. Etiam exindè patet, per  $B$  (ad partes alterutras) rectam duci posse; ita ut è  $D$  educatarum partes ab illa rectâque  $BC$  ad interceptas à rectis  $BA, BC$  rationem habeant minorem quâpiam datâ.

Nam sumatur  $PQ = PZ$ ; ergò connexa  $BQ$  *hyperbolam*  $OBO$  tangit; & liquet à rectis  $BQ, BC$  interceptas ad interceptas à  $BC, BA$  minorem rationem habere, quam habent interceptæ ab hyperbolâ  $OBO$  & recta  $BC$  ad easdem; hoc est minorem datâ quâpiam.

IX. Sit rursus angulus rectilineus  $ABC$ , & punctum  $D$ ; item Fig. 43.  
 linea

Fig. 43.

linea O O O talis; ut si è D utcumque ducatur recta D O; secans anguli latera punctis M, N, habeat D M ad N O semper eandem rationem (puta X ad Y) erit etiam linea O O O hyperbola.

Nam ducatur D L ad B C parallela; sitque D L . D E :: X . Y; & per E ducatur E R ad A B parallela; secans B C in Z; de- mum per O ducatur O H ad B A parallela.

Est jam D L . D E :: D M . N O :: L M . G O (ob similia tri- angula D L M, N G O) :: L M x D H . G O x D H item D L x H O = L M x D H (ob D L . L M :: D H . H O) quare D L . D E :: D L x H O . G O x D H hoc est D L x H O . D E x H O :: D L x H O . G O x D H adeóq; D E x H O = G O x D H. hoc est D E x H G + D E x G O = G O x D E + G O x E H quare (communi sublato) est D E x H G = G O x E H; seu D E x H G = G O x Z G. Pa- tet itaque curvam O O O esse *hyperbolam* cujus *asymptoti* Z R Z C.

*Coroll.* Si ratio data sit æqualitatis (ceu D M = N O,) ipsæ A B, C B asymptoti erunt.

Sequentia quedam, quia magis id perspicuum videtur, Alge- bricè monstrabimus.

Fig. 44.

X. Esto positione data recta I D, in qua punctum designatum D; sit item curva D N N talis ut in I D sumpto quopiam puncto G, & ductâ rectâ G N ad positionem datam I K parallela; tum adsumptis determinatis rectis  $m, b$ ; positîsq; D G =  $x$ , & G N =  $y$ ; sit constantè  $m y + x y = \frac{m}{b} x x$ ; erit linea D N N *hyperbola*; quæ sic determinatur; sumantur D M, & D O (hinc indè) pares ipsi  $m$ ; & per M ducatur M L ad I K parallela, factóq;  $b : m :: m . M Q$ ; sit  $M Z = 2 M Q = \frac{2 m m}{b}$ ; tum per Z, O traducatur recta Z T; erunt Z M, Z T asymptoti.

Ducatur enim Z S ad M O parallela, cui occurrat N G in R (quæ & ipsam Z T fecit in P). & connectatur D Q. Est ergò P N = R G + G N - R P. Verum est M D . M Q :: Z R (M G) . R P; hoc est  $m . \frac{m m}{b} :: m + x . R P = \frac{m m}{b} + \frac{m x}{b}$  adeóq; R G - R P =  $\frac{m m}{b} - \frac{m x}{b}$  ergò P N =  $\frac{m m - m x}{b} + y$ . Unde P N x M G =  $\frac{m^3}{b} + m y + x y - \frac{m x x}{b}$  Verum (ex hypothesi) est  $m y +$

+

$+ x y - \frac{m x x}{b} = 0$ . ergò  $P N \times M G = \frac{m^3}{b} = M D \times Z Q$ .  
vel  $P N . Z Q :: (M D . M G ::) Q D . Z P$ . Quapropter est  
 $P N \times Z P = Z Q \times Q D$ . Unde palam est curvam  $D N N$  esse hy-  
perbolam, cujus asymptoti  $Z M, Z T$ .

Fig. 44.

XI. Notetur; si æquatio sit  $m y - x y = \frac{m}{b} x x$ ; eadem ha-  
bebitur *hyperbola*; tunc solum puncta  $G$  ad partes  $D M$  sumuntur.  
Quin & si æquatio sit  $x y - m y = \frac{m}{b} x x$ ; puncta  $G$  ultra  $M$   
capiendo, proveniet *hyperbola*, huic ipsi *conjugata*.

XII. Sit Triangulum  $B D F$ ; & linea  $D N N$  talis, ut ductâ ut-  
cunque  $R N$  ad  $B D$  parallelâ (quæ lineas  $B F, D F, D N N$  secet  
punctis  $R, G, N$ ) connexâque rectâ  $D N$ ; sit perpetuò  $D N$  propor-  
tione media inter  $R N, N G$ ; erit linea  $D N N$  *hyperbola*.

Fig. 45.

Per  $D$  ducatur  $D K$  ad  $D B$  perpendicularis (secans ipsam  $R N$  in  $E$ )  
& sit  $F H$  ad  $D B$  parallela; vocenturque  $D B = b$ ;  $D F = d$ ;  $F H$   
 $= f$ ; tum  $D G = x$ ; &  $G N = y$ ; Estque  $d . f :: x . \frac{f x}{d} = G E$ ;  
unde  $\frac{x f x}{d} + x x + y y = 2 E G \times G N + D G q + G N q$   
 $= D N q$ . Porro est  $d . b :: F G . G R :: d - x . R G = b - \frac{b x}{d}$ . Un-  
de  $R N = b - \frac{b x}{d} + y$ . Et ideò  $b y - \frac{b x y}{d} + y y = R N \times$   
 $N G = D N q = \frac{2 f x y}{d} + x x + y y$ . quare  $b y - \frac{b x y}{d} =$   
 $\frac{2 f x y}{d} + x x$ . quam æquationem ordinando fit  $\frac{d b}{2 f + b} y - y x =$   
 $\frac{d}{2 f + b} x x$ . quòd si ponatur  $m = \frac{d b}{2 f + b}$ ; erit  $m y - x y =$   
 $\frac{m}{b} x x$ . Unde liquet  $D N N$  esse *hyperbolam*, qualis habetur in præ-  
cedente determinata,

Not. Si angulus  $D G N$  rectus fuerit, evanescente tum  $f = 0$ , erit  
H  $d =$

$d = m$ ; vel  $dy - xy = \frac{d}{b} xx$ . Aliaquædam hîc (nonnulla forsan  $\pi\alpha\acute{\iota}\rho\iota\sigma\iota\varsigma$ ) inferemus.

Fig. 46.

XIII. Sit positione data recta  $ID$ ; sit item curva  $DNN$  talis, ut in  $ID$  sumpto puncto quopiam  $G$ , ductâque rectâ  $GN$  ad positionem datam  $IK$  parallêlâ; sumptisque determinatis lineis  $g, m, r$ ; positisque  $DG = x$ , &  $GN = y$ ; sit perpetim  $yx - gx - my = \frac{m}{r}xx$ ; linea  $DNN$  erit *hyperbola*, sic determinabilis: Sumatur  $DM = m$ ; & per  $M$  ducatur  $ML$  ad  $IK$  parallêla; & in hac accipiatur  $MQ = \frac{mm}{r}$ ; & sit  $QY = MQ$ ; & ab  $M$   $Y$  auferatur  $YZ = g$ ; connexâque  $QD$ , ducatur  $ZT$  ad  $QD$  parallêlâ; erunt  $ZM, ZT$  *asymptoti*.

Nam ducatur  $ZS$  ad  $MD$  parallêla; cui occurrat  $GN$  producta in  $R$  (sed &  $GR$  ipsam  $ZT$  fecerit in  $P$ ). Estque jam  $PN = RG - RP - GN = \frac{mm}{r} - g - \frac{mx}{r} - y$ . adeoque  $PN \times MG = \frac{m^3}{r} - mg + yx - gx - my - \frac{m}{r}xx = \frac{m^3}{r} - mg + 0 = \frac{m^3}{r}$ . unde  $PN \cdot ZQ : (DM \cdot MG ::) QD \cdot ZP$ . ergò  $PN \times ZP = ZQ \times QD$ . Liquet igitur curvam  $DNN$  esse *hyperbolam*, cujus *asymptoti*  $ZM, ZT$ .

Si æquatiò sit  $-yz + gx - my = \frac{m}{r}xx$ ; eadem erit *hyperbola*. Sed puncta  $G$  inter  $B, M$  tunc accipiuntur; & ità prout aliis ac aliis locis puncta  $G$  designantur, æquationis signa variantur; at non est ea jam exponendi locus.

Fig. 47.

XIV. Positione datæ sint rectæ  $DB, BA$ ; pèrque rectam  $DB$  feratur recta  $CX$  ad  $BA$  parallêla; item per punctum  $D$  rotando transeat recta  $DY$ , sic ipsam  $BA$  secans in  $E$ , ut sit inter rectas  $BE, DC$  eadem semper proportio (puta quæ cujusdam assignatæ  $R$  ad  $DB$ ) rectæ verò  $DE, CX$  se interfecerint punctis  $N$ ; erit linea  $DNN$  *Parabola*.

Nam sit  $R \cdot DB :: DB \cdot P$ . Est ergò  $BE \cdot DC :: DB \cdot P$ . Item est  $DB \cdot BE :: DC \cdot CN$ . ergò  $DB \cdot BE - BE \cdot DC = DC \cdot CN$



CN-DB.P. hoc est DB.DC::DC×DB. CN×P. hoc est DB×DC. DCq::DC×DB. CN×P. Quapropter est DCq=CN×P; ergo patet *curvam DNN esse parabolam*, cujus *parameter* P, *vertex* D; *diameter* ipsi BA parallela.

Dedit hoc *Gregorius à S. Vincentio*,\* sed operosâ (si probè memini) prolixitate, demonstratum. \* In Lib. de Spirali.

XV. Adjicimus; Si reliquis iisdem positis, ità ferantur CX, & DY, ut jam semper habeant BE, BC rationem eandem (puta quam BD ad R) erunt etiam intersectiones ad *parabolam*. Fig. 43.

Nam bisecetur DB in G, ducaturque GV ad BE parallela, secans curvam DNN in V; & quoniam est BC.R::BE.BD::CN.CD. erit BC×CD=R×CN. ergo (secundum benè notam *parabola proprietatem*) est curva DNN *parabola*, cujus *parameter* R, *diameter* GV.

Proletaria sunt forsan ista; sed non perinde notata occurrunt hæc:

XVI. Si reliquis similiter positis, recta CX non jam ad ipsam BA, sed ad aliam positione datam (DH) feratur parallela; sitque perpetuò BE.DC::DB.R; erunt *intersectiones* N ad *hyperbolam*. Fig. 49.

Nam ductâ NG ad BA parallelâ, nuncupentur DB=b. BH=h; DG=x. GN=y. Estque  $x.y::b.\frac{by}{x}=BE$ . item  $b::y.\frac{by}{b}=GC$ . quare  $CD=x-\frac{by}{h}$ . Est igitur (ex hypothesi)  $\frac{by}{x}.x-\frac{by}{h}::b.r$ ; unde talis ordinabitur æquatio;  $yx+\frac{bry}{b}=\frac{b}{b}xx$ . ponendôq;  $\frac{br}{b}=m$ ; erit  $yx+my=\frac{m}{r}xx$ ; est ergo curva DNN *hyperbola*,\* quæ supra habetur determinata.

\* In 10 hujus.

XVII. Quin etiam si (reliquis, ut in præcedente, suppositis) ità jam feratur CX, ut semper habeat BE ad BC rationem eandem, quam BD ad R; erunt itidem intersectiones N ad *hyperbolam*.

Nam ductâ NG ad A B parallelâ, nominentur rectæ, ut in præeunte; estque jam  $BC=b-x+\frac{by}{b}$ ; atque  $\frac{by}{x}.b-x+\frac{by}{b}$

$$\frac{by}{b} :: b.r. \text{ unde talis emerget æquatio: } yx + bx - \frac{hr}{b}y = \frac{b}{b}$$

Fig. 50,  
51,  
52.

$xxx$ ; hoc est (posito  $\frac{hr}{b} = m$ )  $yx + bx - my = \frac{m}{r}xx$ ; Est igitur curva BNN *hyperbola*, qualem superius exhibuimus determinatam.

Fig. 53.

XVIII. Datæ positione sint rectæ DB, BA; (& in DB designetur punctum D) sitque linea DNN talis, ut ductâ utcumque GN ad BA parallêlâ; sumptis verò determinatis  $g, r$ , vocatisque DG =  $x$ ; & GN =  $y$ , sit  $ry - yx = gx$ ; erit linea DNN *hyperbola*, sic determinanda.

Capiatur DE =  $r$ , & BO =  $g$ ; & per E ducatur recta ER ad BA, ac per O recta OS ad BD parallêlâ; erunt ZR, ZS *asymptoti*.

Nam ductâ NP ad DB parallêlâ, est ZP =  $g + y$ ; & PN =  $r - x$ ; quare ZP  $\times$  PN =  $gr - gx + ry - yx$ . Verùm ex hypothesi est  $-gx + ry - yx = e$ . ergò ZP  $\times$  PN =  $gr = ZE \times ED$ . undè liquido constat Propositum.

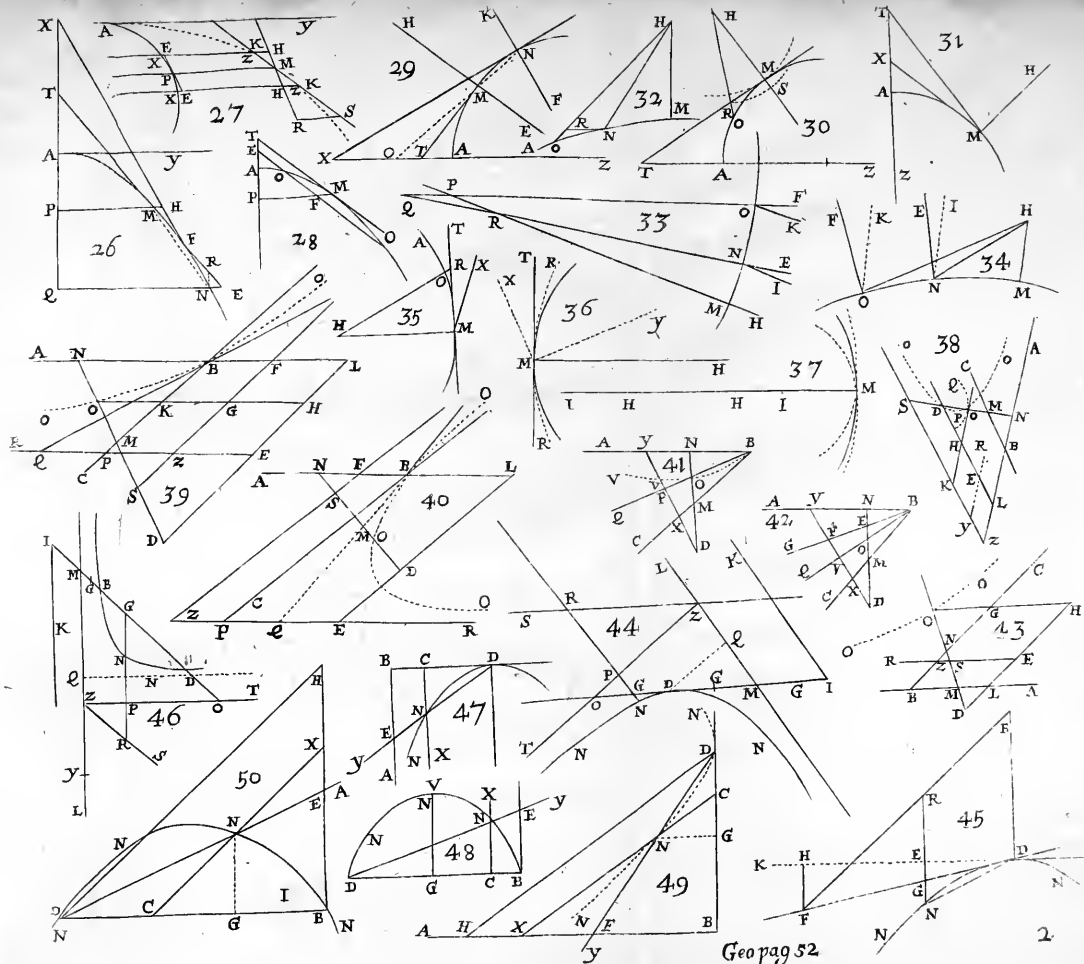
Quòd si fuerit æquatio  $xy - ry = gx$ ; sumenda est DE =  $r$ ; & BO =  $g$  (infra rectam DB) ductisque, ceu prius, parallelis SZR; erit *hyperbola* NNN angulo SZR comprehensa; quod eodem facillè comprobatur modo.

XIX. Datæ positione sint rectæ DB, BA; ac ita ferantur rectæ FX ad DB parallêla, ac DY per punctum designatum D transiens, ut sit semper ratio ipsius BE ad ipsam BF æqualis assignatæ DB ad R; erunt rectarum DY, FX intersectiones ad lineam rectam.

Nam per N ducatur GK ad BA parallêla; éstque DB . DG :: BE . GN :: BE . BF :: BD . R. itaque semper est DG = R. Patet igitur factâ DG = R, & ductâ GK ad BA parallêlâ, intersectiones omnes ad hanc existere.

XX. Quòd si reliquis similiter positis; sumpto autem alio in BA puncto O; ab hoc sumatur computandi initium; ut nimirum sit perpetuò BE, OF :: DB . R; erunt intersectiones N ad *hyperbolam*.

Nam ductâ NC ad AB parallêlâ, sit DB =  $b$ ; OB =  $g$ ; DG =





$$=x; \text{GN} = y. \text{ ergò } BE = \frac{by}{x}; \& \text{OF} = g + y; \text{ ergò } \frac{by}{x}.$$

$g + y :: b.r$ ; hinc autem æquatio  $ry - yx = gx$ . unde DNN est *hyperbola* supra mox determinata.

Quòd si punctum O sumatur infra DB; fiet æquatio  $yx - ry = gx$ . unde rursus constat.

XXI. Quinetiam, reliquis similiter positis, recta FX non jam ipsi DB, sed alteri DH feratur parallela; ita ut assumpto in BA puncto habeat semper BE ad OF rationem assignatam (DB ad  $m$ ) Fig. 54. erunt intersectiones N itidem ad *hyperbolam*.

Nam ducatur NG ad AB parallela; vocenturque DB =  $b$ ; HB =  $f$ ; HO =  $g$ ; DG =  $x$ ; GN =  $y$ ; est ergò  $x.y :: b.\frac{by}{x}$

$$= BE; \& b.f :: x.\frac{fx}{b} = GK; \text{ quare } NK (FH) = y + \frac{fx}{b}$$

$$\& \text{OF} = y + \frac{fx}{b} - g. \text{ Est ergò } \frac{by}{x} . y + \frac{fx}{b} - g :: b.m.$$

unde resultat æquatio  $my + gx - yx = \frac{f}{b}xx$ . vel facto  $f.b ::$

$$m.r; \text{ est } my + gx - yx = \frac{m}{r}xx. \text{ Constat igitur lineam DNN}$$

esse *hyperbolam*; qualis superius habetur determinata.

Notetur, Si computatio ab ipso puncto H. initiumumat, (hoc est sit BE. HF :: DB.  $m$ ) evanescente tunc termino  $g$ ; erit  $my - yx$

$$= \frac{m}{r}xx; \text{ unde quoque supra habetur alia determinatio simpli-}$$

cior.

XXII. Esto triangulum ADB, & linea DYY talis, ut ductâ ut-  
cunque PM ad DB parallelâ, sit perpetuò PY =  $\sqrt{PMq - DBq}$ ; erit linea DYY *hyperbola*; cujus utique Centrum est A, se-  
midiameter AD, (vel asymptotos AB) semiparameter autem P; faci- Fig. 55.  
endo AD. DB :: DB.P.

Sit enim TD = 2 AD. Estque AD P :: (ADq. DBq :: \* 6. 2. Elem.  
APq. PMq :: TP x DP + ADq. PMq :: TP x DP.  
PMq - DBq ::) TP x DP. PYq. vel TD. 2P; TP x DP.  
PYq. unde liquet Propositum.

Corol.

*Corol.* Si YS tangat *hyperbolam* DYY; erit PM q. PY q :: P A. P S.

Nam est PM q. DB q :: P A q. AD q :: P A. A S. ergò per rationis conversionem est P M q. P Y q :: P A. P S.

Fig. 56.

XXIII. Quòd si reliquis similiter positis; sit jam P Y =  $\sqrt{PMq}$  + DB q; erit etiam linea YYY *hyperbola*; cujus nempe Centrum A; *Semidiameter* A F (parallela & æqualis ipsi DB) *Semiparameter* autem P, si fiat A F. A D :: A D. P.

Nam ducatur YK ipsi AP parallela cum AF conveniens in K; Sitque FT = 2 FA; estque A F. P :: (A F q. AD q :: DB q. AD q :: P M q. A P q :: P Y q — DB q. A P q :: AK q — A F q. KY q ::) T K x F K. KY q :: A F. P. unde constat Propositum.

*Corol.* Rursus, Si recta YS *hyperbolam* FYY tangat, erit P M q. P Y q :: P A. P S.

Nam AD est *Semidiameter* ipsi AF conjugata. unde P A. A S :: P A q. AD q :: P M q. DB q. ergò P A. P S :: P M q. P M q + DB q :: P M q. P Y q.

Fig. 57.

XXIV. Sit triangulum ADB, rectum habens angulum ADB; & curva CGD talis, ut ductâ quâcunque rectâ FE G ad DB parallelâ (quæ lineas expositas fecet ut vides) sit aggregatum quadratorum ex EF, E G æquale quadrato ex DB; erit curva CGD *Ellipsis* cujus semiaxes AD, AC.

Nam sit AV = AD. Estque AD q. DB q (AC q) :: AE q. EF q :: AD q — AE q. DB q — EF q. Hoc est AD q. AC q :: V E x ED. EG q. unde liquet Propositum.

*Nota*, Tangat GT *ellipsin* CGD; est EF q. EG q :: EA. ET.

Nam ob AE. AD :: AD. AT. est AE q. AD q :: AE. AT. unde AE q. AD q — AE q :: AE. AT — AE. Hoc est EF q. DB q — EF q :: AE. ET. hoc est EF q. EG q :: AE. ET.

Fig. 58.

Sit *Angulus rectilineus* DTH, in cujus latere TD signetur punctum A. Sit item curva VGG proprietate talis, ut ductâ rectâ quâpiam EFG ad TD perpendiculari (quæ lineas TD, TH, VGG fecet punctis E, F, G,) connexâque rectâ AF, sit EG = AF; erit linea VGG *hyperbola*.

Nam ducantur AP ad TH & VPC ad TD perpendiculares; item

item  $PO$  ad  $TE$  parallela. Estque  $EFq = EOq(CPq) - OFq$   
 $- 2 EO \times OF (- 2 CP \times OF)$ . Verum ob  $CP \cdot CA :: OP \cdot$   
 $OF :: CE \cdot OF$ ; est  $CP \times OF = CA \times CE$ ; ergo  $EFq =$   
 $CPq - OFq - 2 CA \times CE$ . item est  $AEq = CEq -$   
 $CAq - 2 CA \times CE$ ; quapropter est  $EFq - AEq = CPq -$   
 $CAq - OFq - CEq$ . hoc est  $EGq = (APq - PFq =)$   
 $CVq + PFq$ . vel  $EGq - PFq = CVq$ . Verum est  $CE$ .

$(PO) \cdot PF :: CP \cdot AP :: CP \cdot CV$ ; unde  $EGq - \frac{CVq}{CPq} CEq$   
 $= CVq$ ; adeoque linea  $GVG$  est *hyperbola*, cujus centrum  $C$ ; se-  
 miaxes  $CV, CP$ .

*Not.* Ducta recta  $FQ$  ad  $TH$  perpendiculari, sumptaque  $QR =$   
 $AE$ ; & connexa  $GR$ ; erit  $GR$  *hyperbola*  $VGG$  perpendicularis;  
 mihi præsta sis fidem; aut ipse rem ad Calculum exige; eò verba  
 non profundam.

XXVI. Positione data sint rectæ  $AC, BD$  (se interfecantes in  $X$ )  
 quas decussit recta  $AB$ ; tum ducta utrunque rectâ  $PKL$  ad  $AB$  Fig. 59.  
 parallela, (quæ rectas  $AC, BD$  secet punctis  $P, K$ ) sit  $PL$  æqua-  
 lis ipsi  $BK$ ; erit linea  $ALL$  recta.

Nam, (ductâ  $XQ$  ad  $BA$  parallela, est  $AQ \cdot AP :: (BX \cdot$   
 $BK ::) QX \cdot PL$ : ergo linea  $ALL$  est recta.

XXVII. Positione data sit recta  $AX$ , & punctum  $D$ ; neque non  
 linea  $DNN$  talis; ut per  $D$  ducta quâcunque rectâ  $MN$  (quæ re- Fig. 60.  
 ctam  $AX$  secet in  $M$ , & lineam  $DNN$  in  $N$ ) sit perpetim rectangu-  
 lum ex  $DM, DN$  æquale dato (puta quadrato ex  $Z$ ); erit linea  
 $DNN$  circularis.

Nam ducatur  $DB$  ad  $AX$  perpendicularis; sitque  $DB \cdot Z :: Z \cdot$   
 $DE$ ; & connectatur  $NE$ ; Est jam  $DM \times DN = Zq = DB \times$   
 $DE$ ; quare  $DM \cdot DB :: DE \cdot DN$ . ergo triângula  $DBM, DNE$   
 similia sunt; quapropter angulus  $DNE$  rectus est; itaque linea  $DNN$   
 est circularis; (ad circulum pertinens, cujus *Diameter*  $DE$ ).

Vides nedum rectam & *hyperbolam*; sed & suo modo rectam ac  
 circulum sibi lineas esse reciprocas. Verum hîc; etsi præludiis no-  
 stris nondum absolutis, paulum subsistamus.

## L E C T. VII.

**A** Dhuc in *Vestibulo* hæremus ; nec aliud quàm velitamus.

I. Sint duo quanta A, B; quorum majas A; adsumpto tertie quopiam X, erit  $A + X . B \vdash X \supset A . B$ .

Nam ob  $X . A \supset X . B$ ; erit componendo  $X \vdash A . A . \supset X \vdash B . B$ . vel permutando  $X \vdash A . X \vdash B \supset A . B$ .

II. In linea YZ signentur tria puncta, L, M, N; & inter puncta L, N sumpto puncto quopiam E, alteroque G extra LN (versus Z); secetur EG in F, ut sit GE . EF :: NL . LM; cadet punctum F ad partes MZ:

Fig. 61.

\* 1 hujus.

Nam est NE . ME \*  $\sqsubset$  NL . ML :: GE . FE  $\sqsubset$  NE . PE.  
ergo FE  $\sqsubset$  ME.

Fig. 62.

III. Sint rectæ BA, DC parallelæ; item rectæ BD, GP parallelæ; perque punctum B ducantur utcumque duæ rectæ BT, BS ipsam GP secantes punctis L, K, dico fore D S . DT :: KG . LG.

Nam est KG . LG = KG . GB  $\vdash$  GB . LG = PK . PS  $\vdash$  PT . PL = DB . DS  $\vdash$  DT . DB = DT . DS.

Fig. 63

IV. Esto triangulum BDT, basiue DB parallelam quamvis PG interfecent per B ductæ quæpiam duæ rectæ BS, BR punctis L, K; dico fore LG  $\times$  TD  $\vdash$  KL  $\times$  RD . KG  $\times$  TD :: RD . SD.

Sumantur enim BM = GP, & BN = LP; & BO = KP; unde constat junctas PM, PN, PO ipsis TB, SB, RB (respectivè) parallelas esse. Et quoniam est DM . PD :: DB . TD. erit DM  $\times$  TD = PD  $\times$  DB. Similiter est DN  $\times$  SD = PD  $\times$  DB. quare DM  $\times$  TD = DN  $\times$  SD = DM  $\times$  SD  $\vdash$  MN  $\times$  SD, transponendoque DM  $\times$  TD — DM  $\times$  SD = MN  $\times$  SD. Simili planè discursu



discursu est  $DM \times TD - DM \times RD = MO \times RD$ , quapropter erit  $MN \times SD . MO \times RD :: TD - SD . TD - RD$ . hoc est Fig. 63.  
 $LG \times SD . KG \times RD :: TD - SD . TD - RD$ ; vel (ad æquationem redigendo)  $LG \times SD \times TD - LG \times SD \times RD = KG \times RD \times TD - KG \times RD \times SD$ ; transponendoque  $LG \times SD \times TD + KG \times RD \times SD - LG \times SD \times RD = KG \times RD \times TD$ . hoc est  $LG \times SD \times TD + KL \times SD \times RD = KG \times RD \times TD$ . vel (ad analogismum reducendo)  $LG \times TD + KL \times RD . KG \times TD :: RD . SD$ . Quod erat Propositum.

V. Quòd si puncta T, R non ad easdem puncti D partes sita sint, Fig. 64.  
 erit  $LG \times RD - KL \times TD . KG \times TD :: RD . SD$ .

Simili constabit id discursu; quem piget repetere.

VI. Sint quatuor continuè proportionalium series æquineraræ (quales adscriptas cernis) quarum cum antecedentes primi, tum ultimi consequentes inter se proportionales sint ( $A . \alpha :: M . \mu$ ; &  $F . \phi :: S . \sigma$ ) erunt ejusdem ordinis quilibet accepti quatuor etiam inter se proportionales (puta nempe,  $D . \delta :: P . \pi$ ).

A. B. C. D. E. F.

$\alpha$ .  $\epsilon$ .  $\gamma$ .  $\delta$ .  $\iota$ .  $\phi$ .

M. N. O. P. R. S.

$\mu$ .  $\nu$ .  $\varrho$ .  $\pi$ .  $\varsigma$ .  $\sigma$ .

Sunt enim  $A\mu, B\nu, C\varrho, D\pi, E\varsigma, F\sigma$ , } Continuè propor-  
 &  $\alpha M, \epsilon N, \gamma O, \delta P, \iota R, \phi S$ , } tionales.

Cum igitur sit  $A\mu = \alpha M$ ; &  $F\sigma = \phi S$ , liquidum est fore  $D\pi = \sigma P$ ; ac idcirco  $D . \delta :: P . \pi$ . Ad utramque proportionalitatem (tam Arithmetica quam Geometrica) æquè spectat hæc Conclusio.

VII. Rectæ AB, CD parallelæ sint; hâsq; secet positione data BD; lineæ verò EBE; FBF ita relatæ sint, ut ductâ utrunque recta PG ad DB parallelâ; sit semper PF eodem ordine media proportionalis inter PG, PE; tum per quodvis designatum lineæ EBE punctum E transeat HE ipsi AB, CD parallelâ, sitque alia curva KEK talis, ut ductâ utrunque QL itidem ad DB parallelâ, sit QX  
 I  
 eodem

Fig. 65.

Fig. 65.

eodem semper ordine media inter  $QL, QI$  (eodem inquam illo, quo  $PF$  media fuerat inter  $PG, PE$ ): dico lineas  $FBF, KEK$  analogas esse; hoc est ordinatas (quales  $QR, QK$ ) eandem perpetuò inter se rationem habere; eandem scilicet illi quam habet  $PF$  ad  $PE$ .

Hoc è Lemmate proximè præmissò consecratur, uti patebit, ad subiectum Schema mentem advertendo.

$$\left. \begin{array}{lll} QS * QR * QI. \\ QL * QK * QI. \\ PG * PF * PE. \\ PE * PE * PE. \end{array} \right\} \text{Sunt } \div\div. \text{ unde } QR. QK :: PF. PE.$$

*Not.* Pro lineis rectis  $AB, HE, CD$  substitui possent quælibet, etiam curvæ, parallelæ.

Fig. 66.

VIII. Sint rursus, in  $A$  concurrentes duæ rectæ  $AB, AD$ , rectaq;  $BD$  positione data; item duæ curvæ  $EBE, FBF$  sic relatæ, ut ductâ utcunque  $PG$  ad  $DB$  parallelâ, sit semper  $PF$  eodem ordine media proportionalis inter  $PG, PE$ ; tum connexâ  $AE$ , sit alia curva  $KEK$  talis, ut ductâ quâpiam rectâ  $QLI$  ad  $DB$  parallelâ sit semper  $QK$  eodem ordine media inter  $QL, QI$ , quo fuit  $PF$  inter  $PG, PE$ ; erit rursus linea  $FEF$  ipsi  $KBK$  analogâ; seu perpetim  $QR. QK :: PF. PE$ .

$$\left. \begin{array}{lll} \text{Nam } QS * QR * QI. \\ QL * QK * QI. \\ PG * PF * PE. \\ PE * PE * PE. \end{array} \right\} \text{funt } \div\div. \quad \left. \begin{array}{ll} \text{item } QS. QL :: PG. PE. \\ \text{Et } QI. QI :: PE. PE. \end{array} \right\} \text{ergò } QR. QK :: PF. PE.$$

*Not.* Pro rectis  $AB, AH, AD$  substitui possent tres quævis lineæ analogæ.

Fig. 67.

XI Item, sit circulus  $AGB$ , cujus centrum  $D$ ; aliæque duæ curvæ  $EBE, FBF$  tales, ut per  $D$  ductâ quâcunque rectâ  $DG$ , sit perpetuò  $DF$  eodem ordine media proportionalis inter  $DG, DE$ ; tum centro  $D$  per  $E$  describatur circulus  $H E$ ; sitque præterea curva  $KEK$  talis, ut ductâ per  $D$  quâpiam (ad circulum  $HE$ ) rectâ  $DL$ , sit semper  $DK$

DK eodem ordine media inter DL, DI, quo fuerat DF inter DG, DE; erunt curvæ FBF, K B K analogæ, seu perpetuò DR . DK :: DF . DE.

Nam rursus DS . \* DR . \* DI.

DL . \* DK . \* DI.

DG . \* DF . \* DE.

DE . \* DE . \* DE.

sunt  $\div \div$ .

unde DR . DK ::  
DF . DE.

Rursus, pro circulis aliæ linearæ parallelæ, vel analogæ substitui possent.

X. Sint denuò duæ linearæ quævis A GBG, EBE, & altera FBF sic ad istas relata, ut ductâ utcumque à designato puncto D rectâ DG, sit perpetuò DF eodem ordine media proportionalis inter DG, DE; tum adsumatur linea HEL linearæ A GB analogæ (seu talis, ut per D utcumque ductâ DLS, sint perpetuò DS, DL in eadem ratione) sit denuò linea KEK talis, ut ductâ utcumque DL, sit perpetuò DK eodem ordine media inter DL, DI, quo priùs DF inter DG, DE; erit itidem linea FBF linearæ KEK analogæ.

Rursus enim DS . \* DR . \* DI.

DL . \* DK . \* DI.

DG . \* DF . \* DE.

DE . \* DE . \* DE.

sunt  $\div \div$ ;

Et tam primi quàm ultimi quatuor termini sunt proportionales. Unde liquet Propositum.

XI. Sit Arithmeticè proportionalium Series A. B. C. D. E. F; in qua sumptis quibuscunque duobus terminis D, F; sit terminorum à primo A (exclusivè) ad ipsum D numerus, N; & terminorum ab A (itidem exclusivè) ad F, sit numerus M; erit A — : D . A — : F :: N . M.

Nam esto differentia communis, X. est ergò D = A + NX. & F = A + MX. quare A — : D = NX. & A — : F = MX. unde A — : D . A — : F :: (NX . MX ::) N . M.

XII. Hinc, si duæ fuerint ejusmodi series; & in utraque sumantur  
I 2 bini;

bini, eodem ordine sibi respondentes, termini (puta D, F in prima, & P, R in secunda) erit  $A - : D . A - : F :: M - : P . M - : R$ .

A. B. C. D. E. F.

M. N. O. P. Q. R.

Nam harum rationum utraque par est illi, quam habent ad se numeri N, M, quales in præcedente designati sunt.

Hi verò Numeri N, M vulgò terminorum, quibus aptantur, exponentes, aut Indices vocantur, in serie quavis proportionalium; quales nos semper in sequentibus intelligimus, ubi literas has adhibemus.

XIII. Sint qualibet quanta A, B, C, D, E, F continuè proportionalia Arithmeticè; nec non alia totidem, ab eodem termino A incipientia, Geometricè proportionalia; sit autem illorum secundum B non majus horum secundo M; erit quodlibet in serie Geometrica majus eo, quod ipsi coordinatur in serie Arithmetica.

A. B. C. D. E. F.

A. M. N. O. P. Q.

Est enim  $A - + N \sqsubset 2 M$  (vel  $\sqsubset 2 B = A - + C$ . ergò  $N \sqsubset C$ . unde  $M + N \sqsubset B - + C = A - + D$ . Est autem  $A - + O \sqsubset M - + N$ . ergò  $A - + O \sqsubset A - + D$ . Et ideò  $O \sqsubset D$ . ergò  $M - + O \sqsubset B - + D = A - + E$ . Est autem  $A - + P \sqsubset M - + O$ . ergò  $A - + P \sqsubset A - + E$ ; adeoque  $P \sqsubset E$ . similique porro discursu quoad velis.

XIV. Hinc, si rursus fuerint A, B, C, D, E, F  $\div \div$  Arithmeticè; & A, M, N, O, P, Q sint  $\div \div$  Geometricè; sitque ultimum F non minus ultimo Q; erit B majus quam M.

Nam si dicatur B non majus quam M; erit inde F minus, quam Q contra hypothesin.

Item, iisdem positis; erit penultimum E majus penultimo P.

XV. Nam si  $F = Q$ ; constat ex præcedente fore  $E \sqsubset P$  (scilicet utramque seriem invertendo) sin  $F \sqsubset Q$ ; potiori jure liquet fore  $E \sqsubset P$ .

XVI. Quinimò demum, iisdem positis, quodlibet in serie Arithmetica majus est coordinato quolibet in serie Geometrica; puta, C majus est quam N.

Est

Est enim  $E \sqsubset P$ , ac indè  $D \sqsubset O$ ; & hinc  $C \sqsubset N$ .

XVII. Consecratur hinc; si fuerint quatuor lineæ  $HBH$ ,  $GBG$ ,  $FBF$ ,  $E B E$  sese interfecantes in  $B$ , ac ita versus se relatæ, ut ductâ utcumque rectâ  $D H$  ad positione datam  $D B$  parallelâ (in linea nempe  $D D D$  terminatâ) vel à designato puncto  $D$  projectâ  $D H$ ; sit per quod  $D G$  inter  $D H$ ;  $D E$  eodem ordine media proportionalis Arithmeticè, quo  $D F$  inter easdem media Geometricè; lineæ  $G B G$ ,  $F B F$  sese mutuo contingunt.

Fig. 68.  
69.

Enimverò lineæ  $G B H$  extra lineam  $F B F$  totam cadere manifestum è præcedente.

XVIII. Ex isthinc etiam (quod strictim transcurrens moneo) diversis innumeris *Hyperbolarum*, aut *Hyperboliformium* generibus convenientes rectæ ἀστυπταται definiuntur. Sint nempe rectæ  $VD$ ,  $BD$  positione datæ; sint item aliæ datæ rectæ  $AB$ ,  $VI$ ; ductâ verò liberè rectâ  $PG$  ad  $DB$  parallelâ, sit  $P \phi$  constantè inter  $PG$ ,  $PE$  eodem ordine media proportionalis Arithmeticè, quo  $PF$  inter easdem media Geometricè; quia jam (a) rectæ  $EG$ ,  $E \phi$  semper eandem obrirent rationem, est lineæ  $\phi \phi \phi$  recta; verum lineæ  $VFF$  est hyperbola, vel hyperboliformis aliqua (communis quidem vel Apolloniana hyperbola, si  $PF$  sit inter ipsas  $PG$ ,  $PE$  simpliciter media, sed alia diverſi generis quædam hyperboliformis, si  $PF$  sit alterius cujuspian ordinis media) atqui patet è penultima præmissa lineam  $\phi \phi \phi$  eodem ordine respondentem lineæ  $VFF$  asymptoton esse. quod an ἀστυπταται sit nescio, nobis certè ἀστυπταται fuit, hinc adnotasse.

Fig. 70.

(a) 12 hujus.

XIX. A puncto assignato  $B$  ad datam positione rectam  $AC$  ductæ sint rectæ tres  $BA$ ,  $BC$ ,  $BQ$ ; tum in  $QC$  producta sumatur sumptum quodpiam  $D$ ; per  $B$  recta (puta  $BR$ ) duci potest (ad alterutras ipsius  $BQ$  partes) talis, ut à  $D$  projectâ quâcumque rectâ, cen  $DN$ ; sit hujus à rectis  $BQ$ ,  $BR$  intercepta pars ( $FE$ ) minor ejusdem à rectis  $BA$ ,  $BC$  interceptâ parte ( $NM$ ).

Fig. 71.

Nam, primò, si  $BR$  ultra angulum  $ABC$  jaceat respectu puncti  $D$ , fiat  $QR = CA$ ; & connectatur  $BR$ ; tum utcumque ducatur  $DE$ , rectas secans, ut vides; & manifestum est, \* è supra monstratis fore,  $FE = NM$ .

\* Per 7. Lect. VI.

Sin  $BQ$  citra angulum  $ABC$  cadat versus  $D$ ; (a) ducatur recta  $BH$  talis, ut à  $BQ$ ,  $BH$  interceptæ minores sint interceptis à  $BQ$ ,  $BA$ ; & sumatur  $HR = QC$ ; & connectatur  $BR$ ; tum rursus utcumque ductâ  $DN$ , quæ rectas interfecet, ut exhibet Schema; quoniam

\* Per VI. 8 Lect. Fig. 72.

(b) *Constr.*

niam jam est KF (b)  $\supset$  NF; & KE\*  $\supset$  ME; perspicuum est restare FE  $\supset$  NM.

Ita quidem ab una rectæ BQ parte recta BR duci potest, quæ minores ipsis MN intercipiat; (a) potest autem ab altera parte recta quoque duci, quæ minores intercipiat ipsis FE; unde totum liquet Propositum.

Fig. 73.

XX. In recta DZ sint tria puncta D, E, F; & in F sit vertex anguli rectilinei BFC, cujus latera secet recta DBC; per E verò ducta sit recta EG; potest ab E recta duci (ceu EH) talis, ut à puncto D projecta utcumque recta DK sit in hac à rectis EG, EH intercepta minor à rectis FC, FB intercepta.

(a) 19. hujus.

Ducantur ES ad FC, & ER ad FB parallelæ; & in primo casu, ubi punctum E puncto D vicinius est, (ob similitudinem triangulorum ENM, FKI) manifestum est fore MN  $\supset$  IK, (a) potest autem ab E duci recta (puta EH) talis, ut interceptæ PO minores sint interceptis MN; ergo liquet.

Fig. 74.

(c) *Constr.*

(d) 6. Lect. VI.

In altero casu, ubi punctum F ipsi D propius, sumatur SL æqualis ipsi CB; & connectatur EL; Estque jam IK. MN :: FK. EN :: DF. DE :: FC. ES :: BC. RS (c) :: LS. RS (d)  $\supset$  QN. MN. quapropter est IK  $\supset$  QN. (a) potest autem ab E recta duci, ceu EH, sic ut ab EG, EH interceptæ OP minores sint interceptis QN. quamobrem abundè constat Propositum.

Fig. 75.

XXI. Curvam BA tangat recta BO in B; sitque recta BO æqualis curvæ BA; sumpto tunc in curva puncto quopiam K connectatur recta KO; erit KO major arcu KA.

Nam, quoniam recta minimum est inter bina puncta intervallum, est BK + KO  $\supset$  BO = BK + KA. ergo KA  $\supset$  KO.

XXII. Hinc, utcumque sumptis (ad easdem contactus partes) duobus punctis K, L, connexaque recta KL; erit KL + LO  $\supset$  KA.

Nam, supra contactum versus A, est KL + LO  $\supset$  KO  $\supset$  KA.

Infra verò, est KL + LB  $\supset$  KB (ex hypothesebus *Archimedis*) adeoque KL + LO  $\supset$  KA.

## LECT. VIII.

**M**ihi sanè videor (videbor & vobis, opinor) quod irridebat sapiens ille Scurra, perquam exigua Civitati portas ingentes extruxisse. Nec enim adhuc aliud quàm ad rem aliquanto propius enititur. ad illam.

I. Hæc adsumimus. Si duæ lineæ ( $OMO$ ,  $TMT$ ) sese contingant, angulos ipsæ comprehendunt ( $OMT$ ) rectilineo quovis angulo minores. Et vice versâ: Si duæ lineæ ( $OMO$ ,  $TMT$ ) angulos contineant quovis rectilineo minores, illæ sese contingunt (contingentibus saltem æquipollebunt). Fig. 76,  
77.

Hujus *effari* rationem jam pridem (ni fallor) attigimus.

II. Hinc; Si duas lineas  $OMO$ ,  $TMT$  tertia quæpiam linea  $PMP$  contingat, ipsæ etiam lineæ  $OMO$ ,  $TMT$  sese contingunt.

Nam quoniam lineæ  $OMO$ ,  $PMP$  sese contingunt, erit angulus  $OMP$  quovis rectilineo minor. Item, ob linearam  $TMT$ ,  $PMP$  contractum, erit angulus  $TMP$  quovis etiam rectilineo minor. Erit igitur angulus  $TMO$  rectilineo quovis minor. Unde lineæ  $OMO$ ,  $TMT$  se mutuò contingunt.

III. Tangat recta  $FA$  curvam  $FX$  in  $F$ ; sitque positione data recta  $FE$ ; sint item duæ curvæ  $EY$ ,  $EZ$  tales, ut ductâ utrunque rectâ  $IL$  ad  $EF$  parallelâ (quæ lineas expositas secet, ut vides) sit semper intercepta  $KL$  æqualis interceptæ  $IG$ ; etiam curvæ  $EY$ ,  $EZ$  sese contingunt. Fig. 78.

Si non tangant, potest inter ipsas constitui angulus rectilineus, puta  $BEC$ , hunc utrunque secet ad  $FE$  parallela  $IL$ ; sumatúrque  $GH = BC$ , & connectatur  $FH$ ; sunt igitur è parallelis ad  $FE$  à rectis  $FG$ ,

FG, FH interceptæ pares interceptis ab EB, EC; hoc est minores interceptis à curvis EY, EZ; hoc est minores interceptis à curva FX, & recta FA; quapropter angulus XFA rectilineo HFG major est; unde recta FA curvam FX non tangit, contra *Hypothesin*.

Fig. 79.

IV. Itidem, Tangat recta FA curvam FX, & sint duæ curvæ EY, EZ tales, ut ab assignato puncto D utcumque ductâ rectâ IL (quæ lineas expositas fecet ut vides) sit semper  $KL = IG$ ; curvæ EY, EZ sese tangent.

(a) 20 Lect.  
VII.

Nam, si neges, his interferatur *angulus rectilineus* BEC; quem utcumque a D projecta fecer recta DL; (a) potest jam ab E recta duci (puta FH) talis, ut sint è projectis à D a rectis FG, FH interceptæ minores interceptis ab ipsis EB, EC, hoc est multo minores interceptis à recta EA, curvæque FX. Unde sequetur angulum AFX rectilineo GFH majorem esse; ac idcirco rectam AF non contingere curvam FX, adversus *Hypothesin*.

Hæ præcedentes duæ Conclusiones veræ sunt, & simili ratione demonstrantur, posito interceptas IG, KL quamvis ad se perpetim habere proportionem eandem. Parco verbis.

Proposuimus hæc, ut sequentium nonnulla à scrupulis muniantur.

V. Sit recta VEI, duæque curvæ YFN, ZGO sic ad se relatæ, ut ductâ utcumque rectâ EFG ad positione datam AB parallelâ, habeant interceptæ EG, EF semper eandem rationem inter se; tangat autem recta TG curvarum unam ZGO in G (cum recta VE conveniens in T-) ducta TE alteram YFN quoque continget.

(\*) Hyp.

Nam utcumque ducatur recta IL (lineas expositas ut vides interfecans) Est igitur IL. IN (a)  $\square$  IO. IN :: EG. EF :: IL. IK. Igitur IN  $\rightarrow$  IK. ergo punctum K extra curvam YFN jacet; totâque recta TE.

(b) Hyp.

(c) Schol. 4. bu-  
jæ.

Aliter. Est IL. IK :: (IO. IN :: IK — IO. IK — IN ::) O.L. NK, ergo cum lineæ GL, GO se (b) tangent, (c) etiam lineæ FN, FK sese tangent.

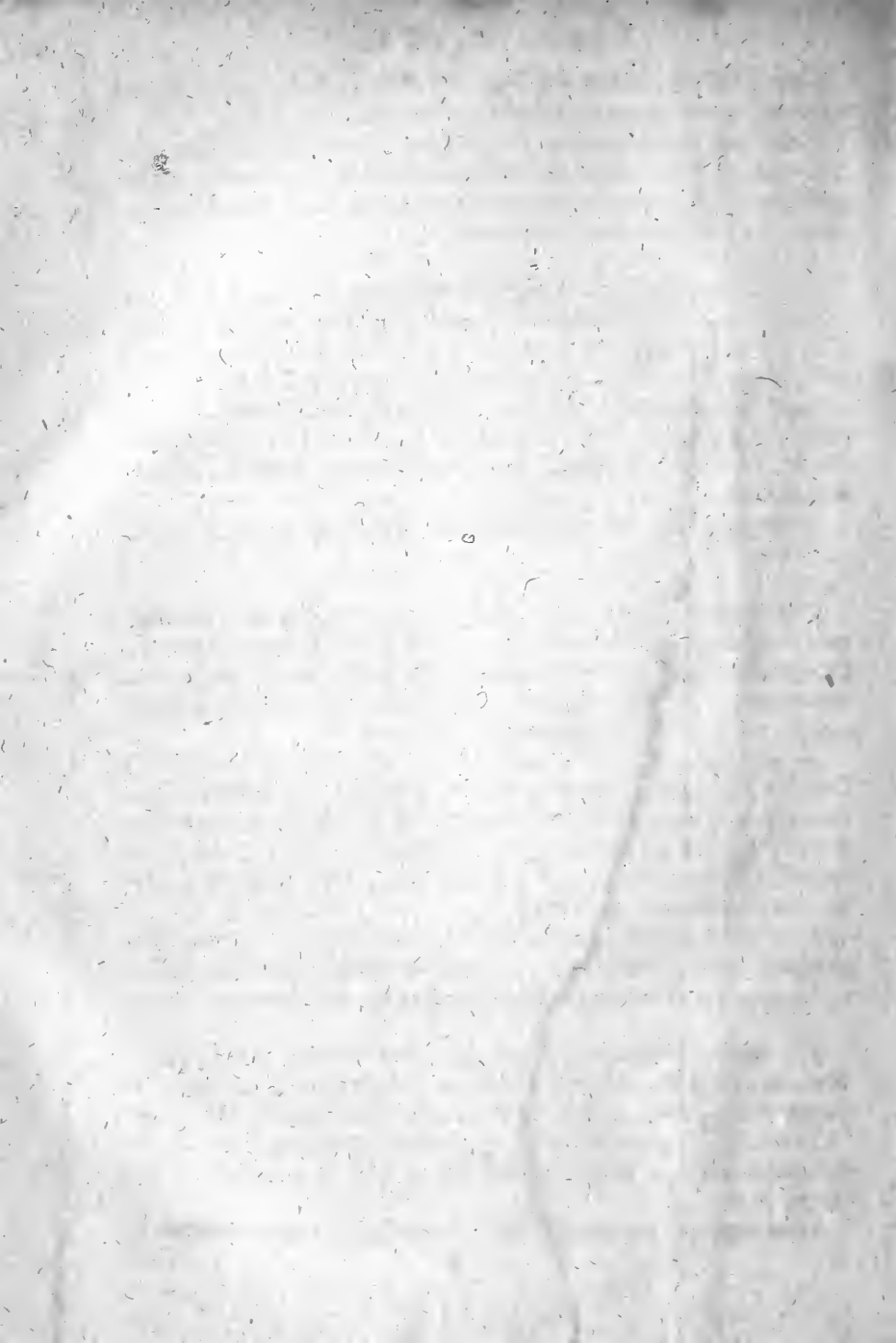
Fig. 80.

VI. Etiam si tres curvæ XEM, YFN, ZGO ita referantur ad se, ut ductâ utcumque rectâ EFG ad positione datam parallelâ, sint semper EG, EF in eadem ratione, concurrant autem duarum XEM, ZGO tangentes ET, GT in T; adjuncta TE curvam YFN tangent.

Nam







Nam (facto ut prius) erit  $IL : IK :: EG : EF :: MO : MN$ .  
 \* quapropter erit punctum  $K$  extra curvam  $YFN$ .

\* 2. Lect. VII.

Possit hæc, ut præcedens, aliter ostendi; sed verbis pluribus.  
 Curvas ita sitas concipe quales figura monstrat. nam  $\epsilon\epsilon\nu\lambda\chi\iota\alpha\upsilon$  ego  
 $\alpha\delta\delta\omicron\lambda\epsilon\chi\iota\alpha\upsilon$  fugitans casus præ cæteris obvios ac faciles arripens præ-  
 pono. Hoc ubique subnotatum velim.

VII. Sit punctum datum  $D$ , curvæque duæ  $XEM$ ,  $YFN$ , ita  
 relatæ, ut à  $D$  projectâ quacunque rectâ  $DEF$ , habeant ad se rectæ  
 $DE$ ,  $DF$  rationem semper eandem; unam verò  $YFN$  tangat recta  
 $FS$ ; cui parallela sit  $ER$ ; tanget recta  $ER$  curvam  $XEM$ .

Fig. 31.

Nam à  $D$  utcunque projiciatur recta  $DK$  (lineas interfecans, ut  
 vides). Estque  $DK : DI :: DF : DE :: DN : DM$ ; ergò quum sit  
 $DK \sqsubset DN$ ; erit  $DI \sqsubset DM$ ; quare tota recta  $RE$  extra curvam  
 $XEM$  cadit.

Rectæ  $NK$ ,  $MI$  rationem semper eandem obtinent; unde res ali-  
 ter constat.

VIII. Sint tres curvæ  $XEM$ ,  $YFN$ ,  $ZGO$  tales, ut si ab assignato  
 puncto  $D$  projiciatur utcunque recta  $DEFG$ , habeant interceptæ  
 $EG$ ,  $EF$  rationem semper eandem (puta quam  $R$  ad  $S$ ) tangant au-  
 tem rectæ  $ET$ ,  $GT$  curvarum duas (puta  $XEM$ ,  $ZGO$ ) in  $E$ ,  $G$ ;  
 oportet curvæ  $YFN$  tangentem ad  $F$  designare.

Fig. 32.

Concipiatur curva  $TFV$  talis, ut à  $D$  utcunque projectâ rectâ  
 $DMKL$ , (quæ fecer rectas  $TE$ ,  $TG$  punctis  $I$ ,  $L$ , & istam cur-  
 vam in  $K$ ) habeant semper interceptæ  $IL$ ,  $IK$  rationem eandem datæ  
 $R$  ad  $S$ ; (a) est igitur  $IK \sqsubset IN$ ; quare curva  $TFK$  curvam  $YFN$   
 tangit: (b) est autem curva  $TFK$  hyperbola; hanc tangat  $FS$ ; (c)  
 illa quoque curvam  $YFN$  tanget.

(a) 2. Lect.

VIII.

(b) 4. Lect. VI.

(c) 2. hujus.

Quoniam hyperbolam tangentis hîc primum injecta est mentio; hu-  
 jus (unà cum aliarum omnium consimili ratione procreatarum seu re-  
 ciprocæ linearum tangentibus) tangentem ita definiemus.

IX. Sint  $VD$  recta linea, duæque curvæ  $XEM$ ,  $YFN$  ita re-  
 latæ, ut ductâ liberè rectâ  $EDF$  ad positione datam parallelâ, sit  
 semper rectangulum ex  $DE$ ,  $DF$  par eidem alicui spatio; tangat au-  
 tem recta  $ET$  curvam  $XEM$  in  $E$ , cum recta  $VD$  concurrens in  $T$ ;  
 sumaturque  $DS = DT$ ; & connectatur  $FS$ ; hæc curvam  $YFN$   
 tanget ad  $F$ .

Fig. 33.

Nam utcunque ducatur  $IN$  ad  $EF$  parallela, lineas expositas se-  
 cans,

K

eans, ut vides. Estque  $TP \cdot PM \sqsubset (TP \cdot PI ::) TD \cdot DE$   
 item  $SP \cdot PK :: SD \cdot DF$ . ergo  $TP \times SP \cdot PM \times PK \sqsubset TD$   
 $\times SD \cdot DE \times DF :: TD \times SD \cdot PM \times PN$ . Verum  $TD \times$   
 $SD \sqsubset TP \times SP$ ; ac inde magis  $TD \times SD \cdot PM \times PK \sqsubset TD \times$   
 $SD \cdot PM \times PN$ . quare  $PM \times PK \supset PM \times PN$ ; vel  $PK \supset$   
 $PN$ . Itaque recta  $FS$  extra curvam  $YFN$  tota jacet.

*Not.* Si linea  $XEM$  recta fuerit (utique ipsi  $TEI$  coincidens) erit  
 $YFN$  hyperbola vulgaris, cujus centrum  $T$ , asymptotos una  $TS$ , al-  
 tera  $TZ$  ad  $EF$  parallela.

Fig. 84.

X. Quinetiam sit punctum  $D$ ; curvæque duæ  $XEM$ ,  $YFN$  ita  
 relatæ, ut per  $D$  ductâ quacunque rectâ  $EF$ ; sit perpetuò rectangu-  
 lum ex  $DE$ ,  $DF$  æquale cuidam quadrato (ex  $Z$  puta); unam verò  
 curvam  $XEM$  tangat recta  $ER$ ; alterius ad  $F$  tangens ita determina-  
 tur: Ducatur  $DP$  ad  $ER$  perpendicularis: factoque  $DP \cdot Z :: Z \cdot$   
 $DB$ ; bifecetur  $DB$  in  $C$ ; connexâque  $CE$ , ducatur  $FS$  ad  $CF$  nor-  
 malis; hæc curvam  $YFN$  tanget.

(a) 27 Lect.  
 VI.  
 (b) Constr.  
 (c) Hyp.

Nam centro  $C$  per  $F$  describatur *Circulus*  $DOB$ ; & per  $B$  traji-  
 ciatur utcunque recta  $IN$  lineas intersecans, ut vides; estque  $DO \times$   
 $DI$  (a) =  $DP \times DB$  (b) =  $Zq$  (c) =  $DM \times DN$  vel  $DO \cdot DM$   
 $:: DN \cdot DI$ . ergo quum sit  $DM$  (c)  $\supset DI$ ; erit  $DO \supset DN$ ;  
 itaque circulus  $DOB$  curvam  $YFN$  tanget. Quare recta  $FS$  eandem  
 $YFN$  tanget.

Fig. 85.

XI. Curvæ  $XEM$ ,  $YFN$  tales sint, ut ductâ quâpiam  $FE$  ad posi-  
 tione datam parallelâ, sit semper hæc æqualis eidem alicui; curvam  
 autem  $YFN$  tangat recta  $SF$ ; huic parallela  $RE$  alteram  $XEM$   
 continget.

Nam utcunque ductâ  $MK$  ad  $FE$  parallelâ est  $NI \supset (KI = FE$   
 $=) NM$ . Quare punctum  $I$  extra curvam  $XEM$  jacet, &c.

Reverà linea  $XEM$  nil aliud est, quàm ipsa  $YFN$  translocata.  
 Levius hoc, & methodi tantum gratiâ Propositum.

Fig. 86.

XII. Sit curva quæpiam  $XEM$ . quam tangat recta  $ER$  ad  $E$ ; sit  
 item alia curva  $YFN$  ad alteram ita relata, ut ab assignato puncto  $D$   
 utcunque ductâ rectâ  $DEF$ ; sit semper intercepta  $EF$  æqualis alicui  
 determinatæ  $Z$ ; curvæ  $YFN$  tangens (ad  $F$ ) ita designatur: Su-  
 matur  $DH = Z$ ; & per  $H$  ducatur  $AH$  ad  $DH$  perpendicularis;  
 ipsi  $ER$  occurrens in  $B$ ; & per  $F$  ducatur  $FG$  ad  $AB$  parallela; suma-  
 turque  $GL = GB$ ; erit connexa  $LFS$  curvæ  $YFN$  tangens.

Nam

Nam *asymptotis* ER, AB per F descripta concipiatur *hyperbola* OFO; cui occurrat à D projecta quæpiam DO, lineas expositas (a) *Convers. 9.*  
secans, uti cernis. Estque  $QO(a) = DP$ ; (b) quare  $MO \subset DP$  Lect. VI.  
(c)  $\subset DH$  (b) = MN. ergò *hyperbola* OFO curvam YFN tan- (b) *Hyp.*  
git. (c) *Elem.*

Verùm (d) recta LS *hyperbolam* OFO tangit; hæc itaque curvam (d) 9. *hujus*  
YFN quoque tanget.

*Not.* Si XEM ponatur linea recta (vel ipsi ER coincidat) erit YFN *Conchois* prima vulgaris, seu *Nicomedeæ*; hujus igitur tangens è generali ratione quâdam habetur determinata.

XIII. Sit recta LA, curvâque quæpiam BEI; cum alia curva DFG talis, ut ductâ liberè rectâ PFE ad positione datâ quandam Fig. 87.  
parallelâ, possit recta PE quadratum ex PFE unâ cum quadrato ex datâ Z; item curvam BEI tangat recta ET; tum fiat PEq. PFq.: PT.PS; connexa SF curvam DFG tanget.

Nam concipiatur curva VFH talis, ut liberè ductâ QK ad PE parallelâ (quæ lineas expositas secet ut vides) sit perpetuò  $QKq = QHq + Zq$ ; unde quoniam est  $QK(a) \subset QI$ ; erit  $QKq - (a) Hyp.$   
 $Zq \subset QIq - Zq$ ; hoc est  $QHq \subset QGq$ ; ergò curva VFH (b) 22. *Lect. 6.*  
curvam DFG tanget ad F; (b) est autem curva VFH *hyperbola*, quam (c) Cor. 22.  
(c) tangit recta SF. hæc itaque curvam DFG quoque contin- Lect. I.  
get.

XIV. Cætera ponantur eadem; at jam PE unâ cum quadrato ex data Z possit quadratum ex PFE; fiatque PEq. PFq.: PT.PS; Fig. 88.  
& connectatur FS; hæc rursus ipsam GFG continget.

Similis est demonstratio; sed adhibe 23am primæ Lectionis.

XV. Sint curvæ duæ AFB, CGD, communem habentes *axem* AD, ac ita versus se relatæ, ut ductâ quâcunque rectâ FEG ad AD perpendiculari (quæ rectas expositas secet ut vides) sit summa qua-  
dratorum ex ipsis EF, EG æqualis quadrato ex determinata recta Z; Fig. 89.  
tangat autem recta FR ex his curvis unam AFB; & fiat EFq. EGq.: ER.ET; connexa GT curvam CGD quoque tanget.

Concipiatur enim curva OGO talis, ut ductâ rectâ KQO (quæ rectas FR, ER secet punctis K, Q, curvam OGO in O) sit  $QKq + QO = Zq$ ; erit ideò  $QKq + QOq = QIq + QLq$ ; & cum sit  $QKq(a) \subset QIq$ , erit ideò  $QOq \supset QLq$ . itaque (a) *Hyp.*  
curva OGO curvam CGD (introrsum) tangit. (b) Est autem (ex (b) 24. *Lect.*  
VI:  
K 2 ostensis)

ostensis) curva  $OGO$  *Ellipsis*, quam recta  $GT$  tangit. ergò recta  $GT$  curvam  $CGD$  quoque tanget.

Fig. 90.

XVI. Sit curva quæpiam  $AFB$  (cujus axis  $AD$ , & ad hunc applicata  $DB$ ) sit etiam alia curva  $VGC$  ad istam sic relata, ut à designato quodam in axe  $AD$  puncto  $Z$  ad curvam  $AFB$  utcumque ductâ rectâ  $ZF$ , & per  $F$  ductâ rectâ  $EFG$  ad  $DBC$  parallelâ, sit  $EG$  æqualis ipsi  $ZF$ ; sit autem  $PQ$  perpendicularis curvæ  $AFB$ ; sumaturque  $QR$  æqualis ipsi  $ZE$ ; connexa recta  $GR$  ipsi curvæ  $VGC$  perpendicularis erit.

Nam ducatur  $FT$  ad ipsam  $FQ$  perpendicularis, seu curvam  $AFB$  tangens; & concipiatur curva  $OGO$  talis, ut ductâ quâcumque rectâ  $HKO$  ad  $EFG$  parallelâ (quæ rectas  $TE$ ,  $TF$ , & curvam  $OGO$  secet punctis  $H$ ,  $K$ ,  $O$ ) connexâque  $ZK$ , sit  $HO = ZK$ ; tum ductâ  $ZI$ , quoniam  $HK(a) \sqsubset HI$ , erit  $ZK \sqsubset ZI$ , vel  $HO \sqsubset HI$ ; quare curva  $OGO$  curvam  $VGC$  tangit. (b) Est autem  $OGO$  (ex ostensis) *Hyperbola*, cui perpendicularis est recta  $GR$ ; eadem itaque  $GR$  curvæ  $VGC$  quoque perpendicularis erit: Quod E. D.

(a) Hyp.  
(b) 25 Lect. VI

Fig. 91.

XVII. Sint recta  $DQ$ , duæque curvæ  $DRS$ ,  $DYX$  ita relatæ, ut ductâ utcumque rectâ  $REY$  ad positione datam  $DB$  parallelâ (quæ dictas lineas secet, ut perspicis) connexâque rectâ  $DY$ , sit semper  $RY.DY :: DY.EY$ ; tangat autem recta  $RF$  curvam  $DRS$  ad  $R$ ; oportet curvæ  $DYX$  tangentem ad  $Y$  rectam designare.

Concipiatur linea  $DYO$  talis, ut ductâ utcumque  $GO$  ad  $DB$  parallelâ (quæ lineas  $FR$ ,  $FP$ ,  $DYO$  secet punctis  $G$ ,  $P$ ,  $O$ ) connexâque  $DO$  sit semper  $GO.DO :: DO.PO$ ; tanget curva  $DYO$  curvam  $DYX$  ad  $Y$ ; Nam secet recta  $GO$  curvas  $DRS$ ,  $DYX$  punctis  $S$ ,  $X$ ; & connectantur rectæ  $DG$ ,  $DS$ ,  $DX$ ; patet (è curvarum natura) angulos  $XD P$ ,  $DSP$ ; nec non angulos  $ODP$ ,  $DGP$  æquari; quare cum angulus  $DSP$  major sit angulo  $DGP$ ; erit angulus  $XD P$  angulo  $ODP$  major, adeoque  $PX$  major erit quàm  $PO$ ; hinc curva  $DYO$  curvam  $DYX$  tanget ad  $Y$ ; est autem curva  $DYO$  *hyperbola* (a) superius determinata; hanc tangat  $YS$ ; hæc igitur curvam  $DYX$  quoque tanget.

(a) 12 Lect.  
VI.

Not. Si curva  $DRS$  sit circulus, & angulus  $QDB$  rectus, erit curva  $DYX$  *cissois* vulgaris; hujus itaque (cum innumeris aliis similiter genitis) tangens hic definitur.

Fig. 92.

XVIII. Positione datæ sint rectæ  $DB$ ,  $BK$ ; sitque curva  $DYX$  talis;

talīs; ut à puncto D ductā quāvis rectā D Y H (quæ rectam B K fecer in H, curvam D Y X in Y) sit perpetuò subtensa D Y æqualis rectæ B H; oportet curvæ D Y X tangentem ad Y rectam determinare.

Centro D per B ducatur circulus B R S; cui occurrat recta Y E R ad B K parallela; & connectatur D R; estque (propter ang. D Y E = ang. D H B; & D Y = B H, ac D R = D B) triangulum R D Y triangulo D B H simile ac æquale; quare R Y . Y D :: (D H. H B) :: Y D . Y E. unde ex præcedente determinabilis est recta curvam D Y X tangens in Y.

XIX. Sint itidem rectæ D B, B K positione datæ; nec non curva B X X talis, ut à puncto D projecta quâcunque rectâ D X (quæ rectam B K fecer in H, curvâque B X X in X) sit perpetuò H X ipsi B H æqualis; designetur oportet recta curvam B M X tangens in X. Fig. 93.

Concipiatur curva D Y Y talis, ut perpetuò sit D Y = B H (talis nempe, qualem attigimus in præcedente) hanc verò tangat recta Y T in Y, ipsi B K occurrens in R; tum *asymptotis* R B, R T per X descripta censeatur *hyperbola* N X N; ad quam utcunque projiciatur recta D N (lineas expositas secans, ut vides) Estque jam O M (a) = D I)  $\rightarrow$  (a) (D L (b) =) O N; ergò *hyperbola* N X N curvam B X X tangit ad X. Ducatur itaque recta X S *hyperbolam* N X N contingens, hæc ipsam curvam B X X quoque continget.

a) Constr.  
b) Convers.  
9. Lect. VI.

Cæterum satis pro hac vice nugati videmur; cessemus aliquantisper.

## LECT. IX.

Quod ingressi sumus iter actutum recta prosequemur.

Fig. 94.

I. Sint rectæ  $AB, VD$  sibi parallelæ; quas fecat positione data  $DB$ ; transeant verò per  $B$  lineæ  $EBE, FBF$  ita ad se relatæ, ut ducta quavis  $PG$  ad  $DB$  parallelâ, sit perpetuò  $PF$  inter  $PG, PE$  eodem ordine designato media *Arithmetice*; tangat autem recta  $BS$  curvam  $EBE$ ; oportet lineæ  $FBF$  tangentem (ad  $B$ ) designare.

(a) 13. Lect.  
VII.

Sint Numeri  $N, M$  proportionalium  $PF, PE$  (quales (a) explicuimus supra) exponentes; fiatque  $N.M :: DS.DT$ ; connectaturque  $TB$ ; hæc lineam  $FBF$  continget.

Nam utcunque ducta sit recta  $PG$ , dictas lineas secans, uti cernis: Estque  $FG. EG (b) :: N.M :: (c) DS.DT :: (d) LG.KG$ ; cum ergò (e) sit  $KG \supset E G$ ; erit  $LG \supset FG$ ; unde liquet rectam  $TB$  extra curvam  $FBF$  totam consistere.

(b) 11. Lect.  
VII.

(c) Constr.

(d) 3. Lect. 7.

(e) Hyp.

(a) 17. Lect.  
7.

II. Reliquis perstantibus iisdem, sit jam  $PF$  inter  $PG, PE$  media proportionalis Geometricè (eodem ordine media nempe, quo fuit prius *Arithmetice*) eadem  $BT$  curvam  $FBF$  continget.

Etenim è mediis *Arithmetice* Geometricèque proportionalibus hocce modo constructæ lineæ sese mutuò (a) contingunt ad  $B$ ; ergò cum recta  $BT$  tangat unam, hæc alteram quoque continget.

*Exemplum.* Sit  $PF$  inter  $PG, PE$  è sex mediis tertia; erit ergò  $M = 7$ ; &  $N = 3$ ; adeoque  $DS.DT :: 3.7$ .

Fig. 95.

III. Manente porrò quoad cætera proximè præcedente hypothesi, samptoque quovis in curva  $FBF$  puncto  $F$ ; etiam ad hoc punctum tangens recta simili pacto designatur.

Nempe per  $F$  ducatur recta  $PG$  ad ipsam  $DB$  parallela, secans curvam  $EXE$  in  $E$ , tum  $EX$  tangat curvam  $EBE$  in  $E$ ; fiatque  $N.M ::$



M : : P X . P Y ; connectatúrque recta F Y , hæc curvam F B F continget.

Nam per E ducatur recta C E ad A B (vel V D) parallela ; concipiatúrque per E transiens curva H E H talis, ut ductâ quâpiam Q L ad D E parallelâ (curvas E B E, H E H in L, & H ; rectâsque C E, V P in I ac Q secante) sit semper Q H inter Q I, Q L eodem ordine media, quo P F inter P G, P E ; è præcedente jam constat rectam connexam E Y curvam H E H contingere ; verùm curvæ H E H (a) analoga est curva E B F ; (b) ergò recta F Y curvam E B F quoque <sup>a 7. Lect. 7.</sup>  
<sup>b 5. Lect. 8.</sup> continget.

IV. Adnotetur, posito lineam E B E rectam esse, quòd linea F B F parabolæ seu paraboliformium aliqua sit. quare quod de his passim observatum habetur (ex calculo deductum, & inductione quâdam comprobatum, nescio tamen an uspiam Geometricè ostensum) ex immensum uberiore fonte manat, ad innumeras aliorum generum curvas se diffundente.

V. Hinc apertè confectatur ; si T D sit recta, sintque duæ quædam curvæ E E E, F F F ita ad se relatæ, ut ductis rectis P E F ad positione datam B D parallelis, sint ordinatæ P E semper ut quadrata ex ordinatis P F ; rectæ verò E S, F T (ex ejusdem communis ordinatæ terminatis ductæ) curvas hæc contingant ; erit  $T P = 2 S P$  ; Quòd si ordinatæ P E se habeant ut ipsarum P F cubi, erit  $T P = 3 S P$  ; si P E sint ut quadrato quadrata ipsarum P F, erit  $T P = 4 S P$  ; ac sic eodem ad infinitum continuo tenore.

Fig. 96.

VI. Sit porrò Circulus A B C, cujus Centrum D, radius D B, item lineæ E B E, F B F per B transeuntes, ac ita relatæ, ut ductâ per D rectâ quâpiam D G, sit semper D F eodem ordine media Arithmeticè inter D G, D E ; tangat autem recta B O curvam E B E in B ; oportet curvæ F B E tangentem (ad B) designare.

Fig. 97.

Hoc (certè (a) generatim quadantenus præstitum) è re fuerit hîc speciatim apertius atque plenius exequi : Quorsum sit D Q ad D B perpendicularis, quam secet B O in S ; fiat verò N . M : : D S . D T ; connectatúrque recta T B ; hæc curvam F B F tanget.

a 8. Lect. 8.

Tangat enim recta P B circulum A B C ; secentúrque rectæ D S in X, & B S in Y, ita ut sit  $D S . D X :: M . N :: B S . B Y$  ; pèrque puncta X, Y ducantur X Z ad B S, & Y V ad D S parallelæ, concurrentes in C ; tum asymptotis Y C Z per B traducta concipiatur hyperbola L B L ; porrò ex D projiciatur utcumque recta D P distans lineas inter-

Fig. 97.

inter-

*a* *Convers.* 4.  
*Leçt.* VI.  
*b* 11. *Leçt.* VII.  
*c* 1. *Leçt.* VII.

*d* *Constr.*

intersecans, ut expressum vides; estque jam  $PK \cdot PL :: (a) M \cdot N :: (b) GE \cdot GF (c) \perp PE \cdot PF \perp PK \cdot PF$ ; quare  $PL \Rightarrow PF$ ; igitur *Hyperbola*  $LBL$  curvam  $FBF$  tangit. Protracta jam  $TB$  cum  $XZ$  conveniat in  $R$ ; estque tum  $RZ \cdot ZB :: BS \cdot ST$ . unde  $RZ \times ST = BS \times ZB = BS \times SX$ . atqui propter  $DS \cdot SX :: (d) BS \cdot SY$ , est  $DS \times SY = BS \times SX$ . ergo  $RZ \times ST = DS \times SY = DS \times CX$ . vel  $RZ \cdot CX :: DS \cdot ST$ ; compositæque  $RZ \cdot RZ \cdot CX :: DS \cdot DT :: (d) N \cdot M :: CZ \cdot CZ + CX$ . itaque divisim est  $RZ \cdot CX :: CZ \cdot CX$ . adeoque  $RZ = CZ$ ; unde  $RB$  *hyperbolam*  $LBL$  tangit; hæc igitur  $(RBT)$  curvam  $FBF$ , ipsi  $LBL$  contiguam, quoque tanget. quod erat Propositum.

VII. Hinc si persistentibus reliquis, recta tantum  $DF$  jam inter  $DG$ ,  $DE$  perpetuo Geometricè media statuatur (eodem qui prius fuit ordine) eadem  $BT$  curvam  $FBF$  quoque continget.

Etenim ex mediis ejusdem ordinis *Arithmetice Geometricæque* proportionalibus efformatæ lineæ se mutuo contingunt, adeoque communi rectâ tangente gaudent.

Fig. 98.

VIII. Porro (stantibus reliquis ut in postremâ) quodvis in curva  $FBF$  designetur punctum  $F$ , quæ curvam ad hoc tanget recta simili pacto determinatur.

Connectatur utique recta  $DF$  curvam  $EBE$  secans ad  $E$ ; item ducatur  $DQ$  ad  $DG$  perpendicularis ipsam  $EO$  intersecans ad  $X$ ; fiat etiam  $DX \cdot DY :: N \cdot M$ ; & connectatur  $EY$ ; ipsi demum  $EY$  parallela ducatur  $FZ$ ; hæc curvam  $FBF$  continget.

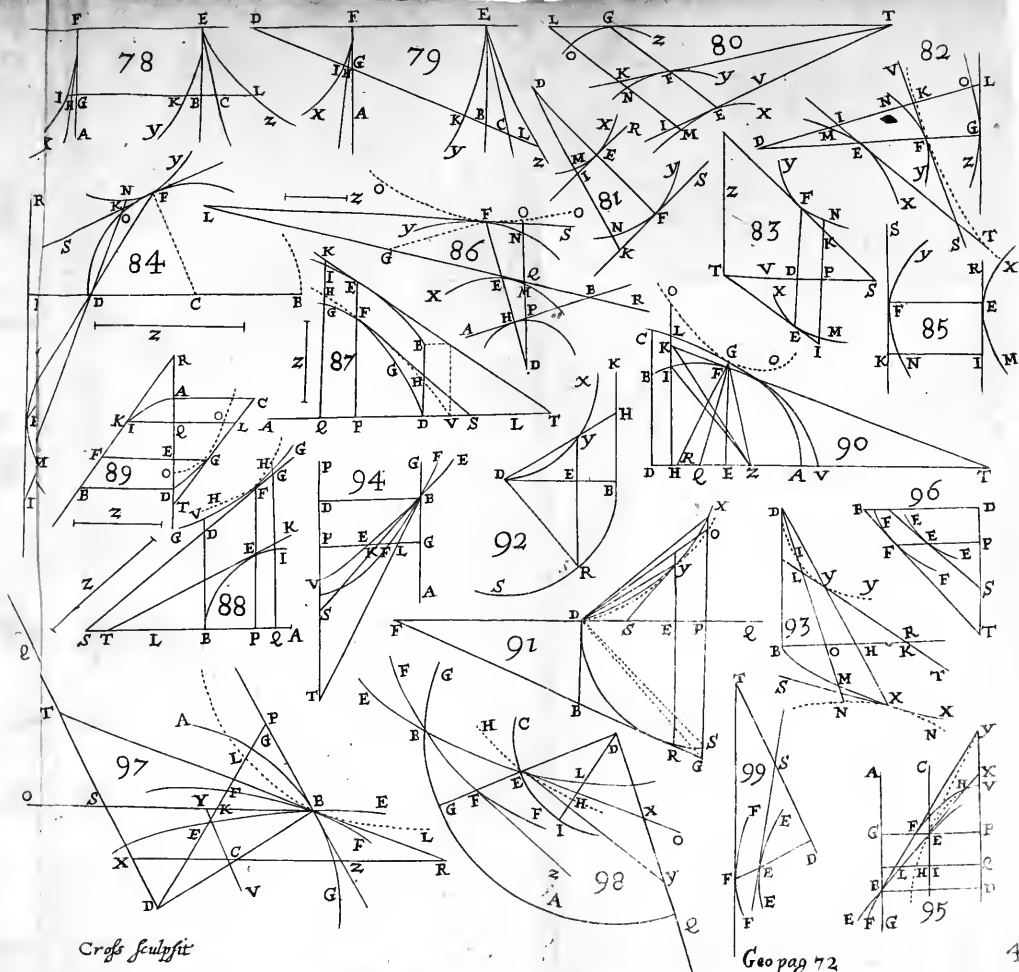
Nam centro  $D$  per  $E$  ducatur circulus  $CEI$ ; concipiaturque linea  $HEH$  talis, ut à  $D$  deductâ quacunq[ue] rectâ  $DI$  (quæ circum  $CE$  fecet in  $I$ , curvam  $HEH$  in  $H$ , & ipsam  $EBE$  in  $L$ ) sit perpetuo  $DH$  eodem inter  $DI$ ,  $DL$  ordine proportionalis, quo  $DF$  inter  $DG$ ,  $DE$ ; palam est tunc (è præcedente) quod recta  $EY$  curvam  $HEH$  tanget; verum ipsi  $HEH$  (a) analoga est curva  $FBF$ ; (b) quare recta  $FZ$  curvam  $FBF$  quoque tanget.

*a* 9. *Leçt.* VII.  
*b* 7. *Leçt.* VIII.

Exhinc nedum innumerarum spiraliū; at aliarum diversi generis infinities plurium tangentes quàm promptè determinantur.

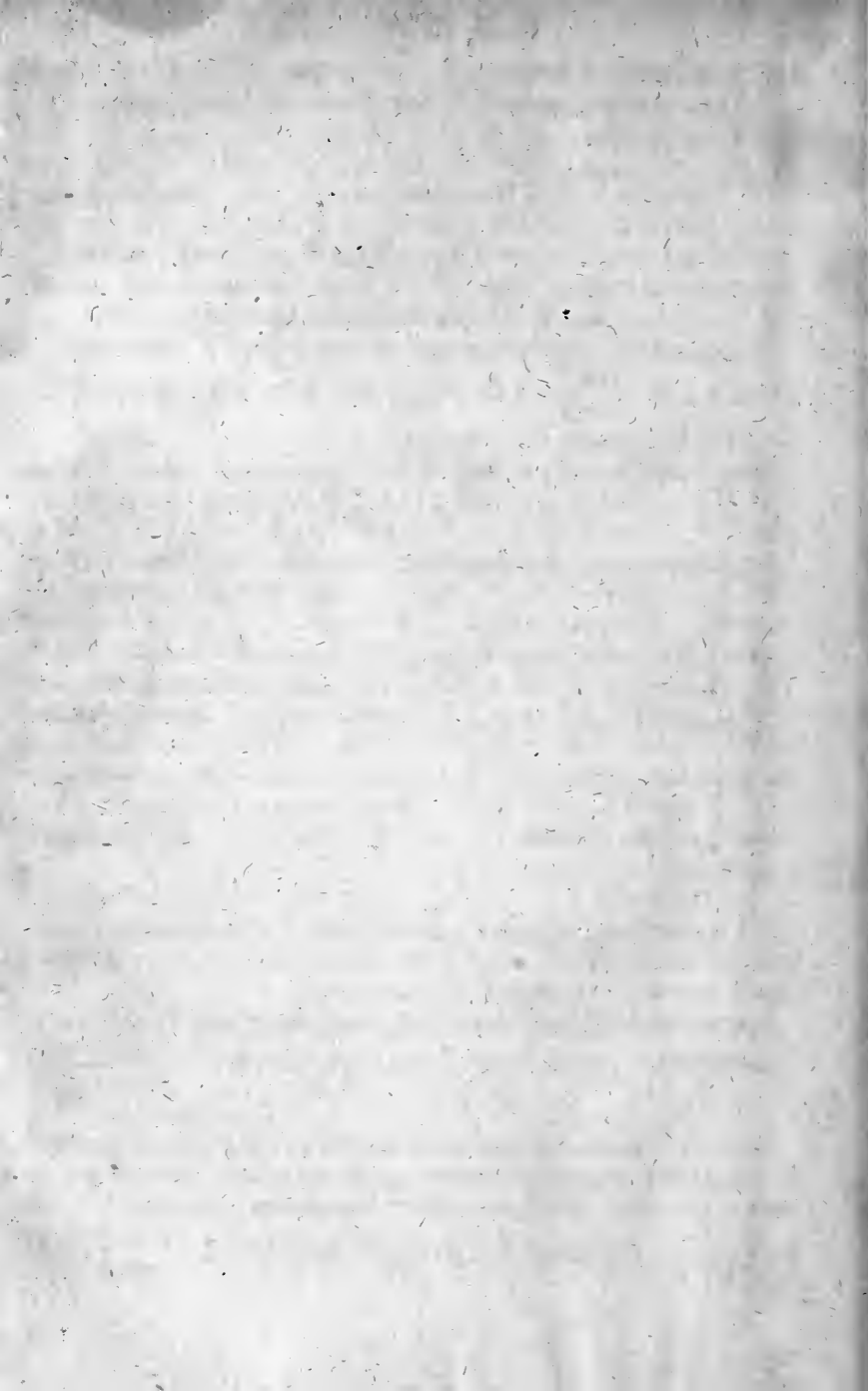
Fig. 99.

IX. Hinc clarum est, si duæ lineæ  $EEE$ ,  $FEF$  sic ad se referantur, ut à puncto quodam  $D$  utcunq[ue] projectis rectis  $DEF$ ; habeant se rectæ  $DE$ , ut quadrata ex ipsis  $DF$ , & ad harum terminos tangent curvas rectæ  $ES$ ,  $FT$ ; cum perpendicularibus ad ipsas  $DEF$



Croft sculpit

Geo pag 72



DE F concurrentes punctis S, T; erit semper  $DT = 2 DS$ . Quod si DE sunt ut cubi ipsarum DF, erit semper  $DT = 3 DS$ ; ac simili deinceps modo. Fig. 99.

X. Sint rectæ VD, TB concurrentes in T, quas decussset positione data recta DB; transeant etiam per B lineæ EBE, FBF tales, ut ductâ quâcunque PG ad DB parallelâ, sit perpetuò PF eodem ordine media Arithmeticè inter PG, PE; tangat autem BR curvam EBE, oportet lineæ FBF tangentem ad B determinare. Fig. 100.

Sumptis NM (ordinum in quibus sunt PF, PE exponentibus) fiat  $N \times TD \frac{+M}{-N} \times RD. M \times TD :: RD. SD$ ; & connectatur BS; hæc curvam FBF continget.

Nam utcunque ducta sit PG, dictas lineas secans ut vides. Estque EG.FG :: (a) M.N. ergo  $FG \times TD. EG \times TD :: N \times TD. M \times TD$ . Item  $EF \times RD. EG \times TD :: M - N \times RD. M \times TD$ . Quapropter (antecedentes conjungendo) erit  $FG \times TD + EF \times RD. EG \times TD :: N \times TD + M - N \times RD. M \times TD$ ; (hoc est) :: (b) RD.SD. (c) Est autem LG  $\times TD - KL \times RD. KG \times TD :: RD. SD$ . quare  $FG \times TD - EF \times RD. EG \times TD :: LG \times TD - KL \times RD. KG \times TD$ . hinc, cum sit EG (d)  $\sqsubset KG$ ; erit  $FG \times TD - EF \times RD \sqsubset LG \times TD - KL \times RD$ ; vel  $FG.EF \vdash TD. RD \sqsubset LG.KL \vdash TD. RD$ ; seu (demptâ communi ratione)  $FG.EF \sqsubset LG.KL$ . vel componendo  $EG.EF \sqsubset KG.KL$  (e)  $\sqsubset EG.EL$ . unde est  $EF \sqsupset EL$ . itaque punctum L extra curvam FBF situm est; adeoque liquet Propositum. (a) 11. Lect. VII. (b) Constr. (c) 4. Lect. VII. (d) Hyp. (e) 1. Lect. VII.

XI. Quinetiam, reliquis stantibus iisdem, si PF supponatur ejusdem ordinis Geometricè media liquet (planè sicut in modo præcedentibus) eandem BS curvam FBF contingere.

*Exemplum.* Si PF sit è sex mediis tertia, seu  $M = 7$ ; &  $N = 3$ ; erit  $3 TD - 4 RD. 7 MD :: RD. SD$ ; vel  $SD = \frac{7MD \times RD}{3TD - 4RD}$ .

XII. Patet etiam, accepto quolibet in curva FBF puncto (ceu F) rectam ad hoc tangentem consimili pacto designari. Nempè per F ducatur recta PG ad DB parallela, secans curvam EBE ad E; & per E ducatur ER curvam EBE tangens; fiatque  $N \times TP \frac{+M}{-N} \times RP$ . Fig. 101.

$M \times T P :: R \{ P . S P ; \& \text{ connectatur } S F ; \text{ hæc curvam } F B F \text{ tanget ; id quod omnino simili discursu demonstratur, quo terra hujus ; tantum hîc (non per } E \text{ ad } V D \text{ parallela ducitur, at) connectitur } E T ; \& \text{ loco septimæ allegatur octava septimæ Lectionis. quid plura ?}$

XIII. Adnotetur, si linea  $E B E$  sit recta, (rectæ nempe  $B R$  coincidens) esse lineam  $F B F$  ex infinitis hyperbolis (vel hyperboliformibus) aliquam ; quarum igitur (unâ cum aliarum infinities diversi generis plurium) *Tangentes* determinandi modum uno *Theoremate* complexi sumus.

Fig. 102. XIV. Quòd si puncta  $T, R$  non ad easdem partes puncti  $D$  (vel  $P$ ) cadant ; curvæ  $F B F$  tangens ( $B S$ ) designatur faciendo  $N \times R D -$   

$$\frac{M}{-N} \} \times T D . M \times T D :: R D . S D .$$

Simili planè discursu constat hoc, tantum (quartæ loco) septimæ Lectionis quintam adhibendo.

XV. Hinc autem nedum *Ellipsoidum* omnium (posito nempe lineam  $E B E$  rectam esse, lineæ  $B R$  coincidentem) ast aliarum alterius generis *linearum innumerabilium Tangentes* unâ operâ determinantur.

*Exemplum.* Si  $P F$  sit è quatuor mediis quarta, seu  $M = 5 ; \& N = 4 ;$  erit  $S D = \frac{5 T D \times R D}{4 R D - T D} .$

Notetur, Si contigerit esse  $N D \times R D = \frac{M}{-N} \} \times T D$ , esse  $D S$  infinitam ; seu  $B S$  ipsi  $V D$  parallelam. Alia possent adnotari ; sed relinquo.

Fig. 103. XVI. Inter alias curvas innumeras, etiam hæc methodo *Cissois* & *Cissoidalium* omne genus comprehenditur : Sit utique semirectus angulus  $D S B$  ; curvæque duæ  $S G B$ ,  $S E E$  sic ad se referantur, ut ductâ liberè rectâ  $G E$  ad  $B D$  parallelâ, (quæ lineas expolitas, ut conspicias, fecer) sint  $P G, P F, P E$  continuè proportionales ; tangat autem recta  $G T$  curvam  $S G B$  in  $G$ , reperietur quæ ad  $E$  lineam  $S E B$  tangit, faciendo  $2 T P - S P . T P :: S P . R P$  ; utique connexa  $R E$  curvam  $S E E$  tanget. Id quod è præmissis facilè colligitur. Quòd si jam curva  $S G B$  sit circulus, & applicationis angulus  $S P G$  sit

fit rectus, erit curva *SE E Cissois vulgaris*, seu *Dioclea*; alioquin alterius generis *Cissoïdalis*. Hoc autem *ἐν πασιδὲ* perstringo. Neq; jam ampliùs vos detinebo.

## LECT. X.

**I**nstitutum circa tangentes negotium adhuc urgeo.

I. Sit curva quæpiam *A E G*, nec non alia *A F I* sic ad illam relata, ut ductâ quâcunque *E F* ad positione datam *A B* parallelâ (quæ curvam *A E G* secet in *E*, curvâque *A F I* in *F* (sit perpetim *E F* æqualis curvæ *A E G* ab *A* intercepto arcui *A E*; tangat autem recta *E T* curvam *A E G* in *E*, sitque *E T* æqualis arcui *A E*, & connectatur recta *T F*; hæc curvam *A F I* tanget. Fig. 104.

Nam ducatur utcunque recta *G K* ad *A B* parallelâ, lineas proportionales secans, ut cernis; estque  $GK = GH + HK = GH + HT$  (a)  $\text{--- arc. } AG = GI$ ; unde punctum *K* extra curvam *A F I* situm est; adeoque recta *T K* ipsam tangit. (a) 22 Lect. VII.

II. Quod si recta *E F* quamlibet ad arcum *A E* rationem semper eandem habeat, nihilo secius recta *F T* curvam *A F I* tanget; ut ex hac, & octavæ Lectionis sexta manifestæ confectatur.

Hæc antea pridem aliter ostendimus; ast hæc demonstratio simplicior aliquanto videtur, & clarior; methodoque quam insinuamus accommodatior.

III. Sit curva quæpiam *A G E*, punctumque designatum *D*; sit item alia curva *A I F* talis, ut à *D* projectâ rectâ quâcunque *D E F*, sit semper intercepta *E F* par arcui *A E*; tangâtque recta *E T* curvam *A G E*; oportet curvæ *A I F* Tangentem (ad *F*) designare. Fig. 105.

Fiat  $TE = \text{arc. } AE$ ; sitque curva *T K F* talis, ut ductâ utcunque (è *D*) rectâ *D K* (quæ curvam *T K F* secet in *K*, rectâque *T E* in *H*)

(a) 17. Lect.  
VIII.

(a) 22. Lect.  
VII.

sit semper  $HK = HT$ ; tum curvam  $TKF$  (a) tangat recta  $FS$  in  $F$ ; hæc curvam  $AIF$  quoque continget.

Est enim  $GK = GH + HK = GH + HT$  (a)  $GA = GI$ . quare punctum  $K$  extra curvam  $AIF$  jacet; adeoque recta  $FS$  curvam  $AIF$  continget.

IV. Quod si recta  $EF$  ad arcum  $AE$  eandem aliquamcunque statueretur habere proportionem, tangens ejus facile determinatur ex hac, & octava octavæ Lectionis.

Fig. 106.

V. Sint recta  $AP$ , duæque curvæ  $AE G$ ,  $AFI$ , ita ad se relatæ ut ductâ utcunque rectâ  $DEF$  (quæ rectam  $AP$ , curvas  $AE G$ ,  $AFI$  punctis  $D, E, F$ , secet) sit semper recta  $DT$  æqualis arcui  $AE$ ; tangat autem recta  $ET$  curvam  $AE G$  ad  $E$ ; sumaturque  $ET$  par arcui  $E A$ ; & sit  $TR$  ad  $BA$  parallela; connectatur denuo recta  $RF$ ; hæc curvam  $AFI$  tanget.

(a) 23. Lect.  
VII.

(b) 26. Lect.  
VI.

\* Hyp.

(c) 3. Lect.  
VIII.

(d) 2. Lect.  
VIII.

Concipiatur enim curva  $LFL$  talis; ut ductâ quâcunque rectâ  $PL$  ad  $AB$  parallelâ (quæ curvam  $AE G$  in  $G$ , rectam  $TE$  in  $H$ , curvam  $LFL$  in  $L$  secet) sit perpetuò recta  $PL$  æqualis ipsis  $TH, HG$  simul; est itaque  $PL$  (a)  $\widehat{=}$  arc.  $AE G$  \*  $= PI$ . Unde curva  $LFL$  curvam  $AFI$  tangit. Item recta  $IK$  (b) æquatur rectæ  $TH$ ; (c) adeoque curva  $LFL$  rectam  $RFK$  tangit; (d) quare curvam  $AFI$  tanget recta.

VI. Etiam si rectæ  $DE$  ad arcus  $AE$  quamlibet semper eandem rationem habeant, recta  $RF$  nihilominus curvam  $AFI$  tanget, ut ex hac, & sexta octavæ Lectionis facile patet.

Fig. 107.

VII. Sit punctum  $D$ ; duæque curvæ  $AGE$ ,  $DIF$  ita versus se relatæ sint, ut à puncto  $D$  projectâ quâvis rectâ  $D F E$ , sit perpetuò recta  $D F$  æqualis arcui  $AE$ ; tangat autem recta  $ET$  curvam  $AGE$  ad  $E$ ; designanda jam est recta, quæ curvam  $DIF$  tangat (ad  $F$ ).

(a) 16. Lect.  
VIII.

(b) 22. Lect.  
VII.

(c) Hyp.

(d) 4. Lect.  
VIII.

Sumatur  $ET$  par arcui  $FS$ ; concipiaturque curva  $DKK$  talis, ut à  $D$  projectâ utcunque rectâ  $DH$  (quæ curvam  $DKK$  in  $K$ , rectam  $TE$  in  $H$  secet) sit perpetuò  $DK = TH$ ; tum curvam  $DKK$  (a) tangat recta  $FS$  ad  $F$ ; hæc curvam  $DIF$  quoque tanget.

Intelligatur enim curva  $LFL$  talis, ut à  $D$  projectâ quâpiam rectâ  $DH$  (quæ rectam  $TE$  secet in  $H$ , curvam  $LFL$  in  $L$ ) sit semper  $DL = TH + HG$ ; est itaque  $DL$  (b)  $\widehat{=}$  arc.  $AG$  (c)  $= DI$ ; (d) itaque curvæ  $DIF$ ,  $LFL$  sese (b) contingunt, item curvæ  $KEK$ ,  $LFK$ .



LFK sese contingunt. (e) quare curvæ DIF, KFK sese quoque contingunt. (e) ergo denique recta FS curvam DIF continget. (e) 2. Lect. VIII.

VIII. Quod si rectæ DF quamvis aliam constanter eandem ad arcus AE rationem obtinuerint, itidem designari potest recta curvam DIF tangens, ex hac, & septima octavæ Lectionis; erit utique tangens ista huic FS parallela.

IX. Hinc nedum *spiralis circularis*, ast innumerabilium simili ratione progenitarum aliarum curvarum *Tangentes* determinantur.

X. Sint curva quæpiam AEH, recta AD (in qua determinatum punctum D) recta DH positione data; sit item curva AGB talis, ut in hac assumpto quocunque puncto G, & per hoc ac D projecta recta DGE (quæ curvam AEH secet in E) ductâque GF ad DH parallelâ habeant AE, AF assignatam rationem X ad Y; tangat autem recta ET curvam AEH; recta designetur oportet, quæ curvam AGB ad G tangat. Fig. 108.

Fiat recta EV æqualis arcui EA; & concipiatur curva OGO talis, ut projectâ quâcunque rectâ DOL (quæ curvam OGO secet puncto O, rectam ET in L) ductâque OQ ad GF parallelâ, sit VL. A Q :: X. Y; estque curva OGO (è supra monstratis) *Hyperbôla*; hanc tangat recta GS; etiam recta GS curvam AGB continget.

Nam concipiatur altera curva NGN talis, ut cum hanc secet recta arbitraria DL in N, curvam AEH in K, rectam TE in L; ductâque sit NR ad GF parallela, sit VL ⊥ LK. AR :: X. Y; manifestum est curvam NGN utramque curvam AGB, & OGO tangere. [secet enim recta DL curvam AEB in I, ducaturque IP ad GF parallela; quum ergo sit VL ⊥ LK. AR :: X. Y :: AK. AP, & sit VL ⊥ LK ⊥ AK; erit AR ⊥ AP; vel DR ⊥ DP; adeoque DN ⊥ DI; unde punctum N intra curvam AGB semper cadet; ac proinde curva NGN curvam AGB tanget; similique planè discursu curva NGN curvam OGO continget.] Itaque curvæ AGB, OGO sese (æquipollentèr) tangunt. Quare cum recta GS curvam OGO tangat; eadem curvam AGB quoque continget: Q. E. F.

Si curva AEH sit circuli quadrans, cujus centrum D; erit curva AGB *Quadratrix communis*. Ejus igitur *Tangens* (unà cum omnium simili ratione genitarum tangentibus) hoc pacto designatur, Hujusmodi.

Hujusmodi plura quædam cogitaram hîc inferere; verùm hæc existimo sufficere subindicando modo, juxta quem, citra *Calculi molestiam, curvarum tangentes* exquirere licet, unâque constructiones demonstrare. Subjiciam tamen unum aut alterum non aspernanda, ut videtur *Theoremata* perquam generalia.

Fig. 109.

XI. Sit linea quæpiam  $ZGE$ , cujus axis  $VD$ , ad quam imprimis applicatæ perpendiculares ( $VZ, PG, DE$ ) ab initio  $VZ$  continuè utcunque crescant; sit item linea  $VIF$  talis, ut ductâ quâcunque rectâ  $EDF$  ad  $VD$  perpendiculari (quæ *curvas* secet punctis  $E, F$ , ipsam  $VD$  in  $D$ ) sit semper *rectangulum* ex  $DF$ , & designatâ quâdam  $R$  æquale *spatio* respectivè *intercepto*  $VDEZ$ ; fiat autem  $DE \cdot DF :: R \cdot DT$ ; & connectatur recta  $TF$ ; hæc curvam  $VIF$  contingeret.

Fig. 110.

Sumatur enim in linea  $VIF$  punctum quodpiam  $I$  (illud primò supra punctum  $F$ , versus initium  $V$ ) & per hoc ducantur rectæ  $IG$  ad  $VZ$ , ac  $KL$  ad  $VD$  parallelæ (quæ lineas expositas secent, ut vides) estque tum  $LF \cdot LK :: (DF \cdot DT ::) DE \cdot R$ ; adeoque  $LF \times R = LK \times DE$ . Est autem (ex præstituta linearum istarum natura)  $LF \times R$  æquale *spatio*  $PDEG$ ; ergò  $LK \times DE = PDEG = DP \times DE$ . Unde est  $LK = DP$ ; vel  $LK = LI$ .

Rursus accipiatur quodvis punctum  $I$ , infra punctum  $F$ , reliquæque fiant, uti prius; similique jam planè discursu constabit fore  $LK \times DE = PDEG = DP \times DE$ , unde jam erit  $LK = DP$ , vel  $LI$ . E quibus liquidò patet totam rectam  $TKFK$  intra (seu extra) curvam  $VIF$  existere.

Iisdem quoad cætera positis, si *ordinata*  $VZ, PG, DE$ , &c. continuè decrescant, eadem conclusio simili ratiocinio colligetur; unitum obvenit *Descrimen*, quòd in hoc casu (contra quàm in priore) linea  $VIF$  concavas suas axi  $VD$  obvertat.

*Corol.* Notetur  $DE \times DT$  æquari *spatio*  $VDEZ$ .

Fig. 111.

XII. Exindè deducitur hoc *Theorema*: Sint duæ lineæ quævis  $ZGE, VKF$  ta relatæ, ut ad communem ipsarum axem  $VD$  applicatâ quâvis rectâ  $EDF$ , sit semper quadratum ex  $DE$  æquale *duplo spatio*  $VDEZ$ ; sumatur autem  $DQ = DE$ , & connectatur  $FQ$ ; hæc curvæ  $VKF$  perpendicularis erit.

Concipiatur enim linea  $VIF$ , per  $F$  transiens, talis qualem mox attingimus (cujus scilicet ad  $VD$  applicatæ se habeant ut spatia  $VDEZ$ ; hoc est ut quadrata ex applicatis à curva  $VKF$  in præseate hypothesi) lineamque

lineamque VIF tangat recta FT; item lineam VKF tangat recta FS. Est ergo  $SD^{(a)} = 2 TD$ . atqui  $DE \times DT^{(b)} = VDEZ$ . IX.   
 ergo  $DE \times SD = (2 VDEZ =) FDq$ . unde constat angulum  $(b)$  Cor. præ.   
 QFS rectum esse. quod Propositum erat.

Adjungam & illis cognata hæc.

XIII. Sit curva quævis AGEZ, punctumque quoddam D (à quo projectæ DA, DG, DE, &c. ab initio DA continuò decrescant) Fig. 112.   
 tum altera sit curva DKE, priorem interfecans in E, naturæque talis, ut à D utcumque projectâ rectâ DKG (quæ curvam AEZ secet in G, curvam DKE in K) sit perpetuò rectangulum ex DK, & designatâ quâdam lineâ R æquale spatio ADG; tum ductâ DT ad DE perpendiculari, sit  $DT = 2 R$ ; & connectatur TE; hæc curvam DKE contingeret.

Nam sumpto quovis in curva DKE puncto K, ducatur recta DKG; & sumptâ  $DL = DK$ , ducatur LR ad DT parallela (secans ipsam DG in Y). tum per E ducatur EX ad DE perpendicularis (hæc verò extra curvam AEZ, ad partes Z cadet, quia decrescunt projectæ versus Z; unde EX versus A intra curvam EGA cadet; eatenus saltem, quatenus huic Proposito satisfaciet). Sit jam primò punctum G supra E, versus initium A, & ob  $TD.DE::RL.LE$ ; adeoque  $RL \times DE = TD \times LE^{(a)} = 2 R \times LE^{(a)} = 2 GDE$  Fig. 113.   
  $\hookrightarrow 2 DEX = EX \times DE$ . ergo  $RL \hookrightarrow EX \hookrightarrow LY$ .  $(a)$  Hyp.   
 Est autem punctum Y extra curvam, quia  $DY \hookrightarrow DL = DK$ ; ergo magis punctum R est extra curvam.

Sit rursus punctum G infra punctum E, versus Z; estque rursus, uti priùs,  $RL \times DE = 2 GDE \hookrightarrow 2 \text{ triang. } EDX = EX \times DE$ . unde  $RL \hookrightarrow EX \hookrightarrow LY$ . Est autem recta LY extra curvam EK tota, (nam etiam extra arcum LK curvæ KE circumductum tota jaceret) ergo punctum R rursus extra curvam existit. Liquidum est igitur rectam TER curvam DKE tangere.

Quòd si punctum aliud in curva DKE designetur, puta K; per quod ducta sit DKG; & fiat  $DG.DK::R.P$ ; sumaturque  $DT = 2 P$ ; & connectatur TG; tum ducatur KS ad GT parallela; recta KS curvam DKE tanget.

Nam concipiatur curva DOG, per G transiens, talis, ut rectâ quâcumque DON à D projectâ (quæ curvam DOG secet in O, curvam DNE in M, curvam AGE in N) sit semper  $DO \times P$  æqualis spatio ADN; erit ideò  $DM \times R = DO \times P$ ; ac proinde  $DM.DO::P.R$ . unde lineæ DKE, DOG analogæ erunt. Verum

rùm ex jam modò ostensis G T curvam D O G tangit; ergò K S ipsam D K E continget.

Notetur esse  $DGq \cdot DKq :: 2R \cdot DS$ .

Nam est  $DGq \cdot DKq = DG \cdot DK - DG \cdot DK = R \cdot P + DT \cdot DS = R \cdot P - 2P \cdot DS = 2RP$ .  $P \times DS = 2R \cdot DS$ . itaque  $DGq \cdot DKq :: 2R \cdot DS$ .

Hæc autem perinde vera sunt, nec absimili modo demonstrantur; etiam si projectæ à D rectæ DA, DG, DE, &c. pares sint (quo casu curva A G E Z Circulus erit, & Curva D K E Spiralis Archimedæa) aut à D A continuò crescant.

Exindè verò facilè colligitur hoc *Theorema* :

Fig. 114.

XIV. Sint duæ curvæ A G E, D K E ità versus se relatæ, ut à designato in curva D K E puncto D ductis rectis D A, D G (quarum hæc ipsam D K E secet in K) sit semper *Quadratum* ex D K *Quadruplum* spatii A D G; ductâ D H ad D G perpendiculari, & factò D K.  $DG :: DG \cdot DH$ ; connexâque H K; erit H K curvæ D K E perpendicularis.

Nam concipiatur linea D O K O, per K transiens, naturâque talis ut ad illam à D projectæ (ceu DK) se habeant in eadem quâ spatia A D G ratione (quales lineas attigimus in proximè superiori) & lineam D O K tangat recta K T, lineam D K E recta K S; convenient autem hæc cum ipsa H D punctis T, S; est igitur (è præcedente) D G q.

$DKq :: \frac{DK}{2} \cdot DT$ . hoc est  $DH \cdot DK :: \frac{DK}{2} \cdot DT$ ; hoc est (quo-

<sup>2</sup> In 12. hujus. njam è \* mox præmonstratis  $DS = 2DT$ )  $DH \cdot DK :: \left( \frac{DK}{2} \cdot \frac{DS}{2} \right) :: DK \cdot DS$ . Liquet igitur rectam H K tangenti K S perpendicularem esse: Q. E. D.

Ità Propositi nostri priore (quam innuebamus) parte quomodo-  
cunque defuncti sumus. Cui supplendæ, appendiculæ instar, sub-  
nectemus à nobis usitatum methodum ex Calculo tangentes reperien-  
di. Quanquam haud scio, post tot ejusmodi pervulgatas atque pro-  
tritatas methodos, an id ex usu sit facere. Facio saltem ex Amici con-  
silio; eoque libentiùs, quòd præ cæteris, quas tractavi, compendio-  
sa videtur, ac generalis. In hunc procedo modum.

Sint A P, P M positione datæ rectæ lineæ (quarum P M propo-  
sitam curvam secet in M) & M T curvam tangere ponatur ad M,  
rectam

rectam  $AP$  secare ad  $T$ ; ut ipsius jam rectæ  $PT$  quantitatem exquiram; curvæ arcum  $MN$  indefinitè parvum statuo; tum duco rectas  $NQ$  ad  $MP$ , &  $NR$  ad  $AP$  parallelas; nomino  $MP = m$ ;  $PT = t$ ;  $MR = a$ ;  $NK = e$ ; reliquasque rectas, ex speciali curvæ natura determinatas, utiles proposito, nominibus designo; ipsas autem  $MR$ ,  $NR$  (& mediantibus illis ipsas  $MP$ ,  $PT$ ) per *aquationem* è Calculo deprehensam inter se comparo; regulas interim has observans. 1. Inter computandum omnes abjicio terminos, in quibus ipsarum  $a$ , vel  $e$  potestas habetur, vel in quibus ipsæ ducuntur in se (etenim isti termini nihil valebunt).

Fig. 115.

2. Post *aquationem constitutam*, omnes abjicio terminos, literis constantes quantitates notas, seu determinatas designantibus; aut in quibus non habentur  $a$ , vel  $e$ . (etenim illi termini semper, ad unam *aquationis* partem adducti, nihilum adæquabunt).

3. Pro  $a$  ipsam  $m$ ; (vel  $MP$ ) pro  $e$  ipsam  $t$  (vel  $PT$ ) substituo. Hinc demum ipsius  $PT$  quantitas dignoscetur.

Quòd si calculum ingreditur curvæ cuspis indefinita particula; substituitur ejus loco tangentis particula ritè sumpta; vel ei quævis (ob indefinitam curvæ parvitatem) æquipollens recta.

Hæc autem è subnexis Exemplis clarius elucescent.

### Exemp. I.

Angulus  $ABH$  rectus sit; & sit curva  $AMO$  talis, ut per  $A$  ductâ utcumque rectâ  $AK$ , quæ rectam  $BH$  secet in  $K$ , curvam  $AMO$  in  $M$ , sit semper subtensa  $AM$  æqualis abscissæ  $BK$ ; hujus curvæ ad  $M$  tangens est designanda. Fig. 116.

Fiant quæ supra præscripta sunt, & (ductâ  $ANL$ ) nominetur  $AB = r$ ; &  $AP = q$ ; unde  $AQ = q - e$ ; item  $QN = m - a$ . ergò est  $qq + ee - 2qe + mm + aa - 2ma = (AQq + QNq = ANq =) BLq$ ; hoc est (rejectis, uti monitum est, rejiciendis)  $qq - 2qe + mm - 2ma = BLq$ . Porro est  $AQ \cdot QN :: AB \cdot BL$ ; hoc est  $q - e \cdot m - a :: r \cdot BL =$   
 $\frac{rm - ra}{q - e}$ . quare  $\frac{rrm + rra - 2rrma}{qq + ee - 2qe} = BLq$ ; seu

(rejectis superfluis)  $\frac{rrmm - 2rrma}{qq - 2qe} = BLq = qq - 2qe + mm - 2ma$ . vel  $rrmm - 2rrma = q^4 - 2q^3e + qqmm - 2qqma - 2q^3e + 4qqee - 2qmm e + 4qma e$ ; hoc est (abjectis iis, quæ præscripsimus abjici-

abjicienda)  $\overline{2 r r m a} = -4 q^3 e - 2 q q m a - 2 q m m e$ . vel  
 $r r m a - q q m a = 2 q^3 e + q m m e$ ; vel denuò substituendo  $m$   
 pro  $a$ , &  $t$  pro  $e$ , est  $r r m m - q q m m = 2 q^3 t - q m m t$ ; vel  

$$\frac{r r m m - q q m m}{2 q^3 - q m m} = t = P T.$$

### Exemp. II.

Fig. 117.

Sit recta EA (positione ac magnitudine data) & curva EMO proprietate talis, ut ab ea utcunque ductâ rectâ MP ad EA perpendiculari *Summa Cuborum* ex AP, & MP æquetur Cubo rectæ AE.

Nominentur AE =  $r$ ; AP =  $f$ ; unde AQ =  $f + e$ ; & AQ cub. =  $f^3 + 3 f f e + 3 f e e + e^3$ ; (seu abjectis superfluis, ex præscripto) =  $f^3 + 3 f f e$ . Item NQ cub. = cub.  $m - a = m^3 - 3 m m a + 3 m a a - a^3$  (hoc est) =  $m^3 - 3 m m a$ . Quapropter est  $f^3 + 3 f f e + m^3 - 3 m m a = (AQ \text{ cub.} + NQ \text{ cub.} = AE \text{ cub.} =) r^3$ . abjectisque datis, est  $3 f f e = 3 m m a = 0$ . seu,  $f f e = m m a$ ; subrogatisque loco  $a$ , &  $e$  ipsis  $m$ , &  $t$ , erit  $f f t = m^3$ ; seu  $t = \frac{m^3}{f f}$ ; est ergò PT quarta proportionalis in ratione AP ad PM continuata.

Similiter, Si fuerit AP q q + MP q q = AE q q; reperietur fore PT =  $\frac{m^4}{f^3}$ ; vel PM quarta proportionalis in ratione AP ad PM; ac ita porro; quod de *Cycloformibus* istis lineis an observatum dignum sit nescio.

### Exemp. III.

Fig. 118.  
La Galande

Positione data sit recta AZ, & AX magnitudine; sit etiam curva AMO talis, ut ductâ utcunque rectâ MP ad AZ normali, sit AP cub. + PM cub. = AX x AP x PM.

Dicantur AX =  $b$ ; & AP =  $f$ ; ergò AQ =  $f - e$ ; & AQ cub. =  $f^3 - 3 f f e$ ; & QN cub. =  $m^3 - 3 m m a$ . & AQ x QN =  $f m - f a - m e + a e = f m - f a - m e$ ; unde AX x AQ x QN =  $b f m - b f a - b m e$ ; hinc æquatio  $f^3 - 3 f f e + m^3 - 3 m m a = b f m - b f a - b m e$ ; seu amolendo reje-

ctanea

Etane,  $bfa - 3mma = 3ffe - bme$ ; substituendoque  $bfm =$   
 $3m^3 = 3fft - bmt$ ; seu,  $\frac{bfm - 3m^3}{3ff - bm} = t$ .

## Exemp. IV.

Sit *Quadratrix* CMV (ad circulum CEB pertinenens cui centrum A,) cujus axis VA; ordinatæ CA. MP ad VA perpendicularares.

Protractis rectis AME, ANF, ductisque rectis EK, FL ad AB perpendicularibus, dicantur arcus CB =  $p$ ; radius AC =  $r$ ; recta AP =  $f$ ; AM =  $k$ . Estque jam CA arc. CB :: NR. arc. FE. Fig. 119.

hoc est,  $r.p :: a. \frac{pa}{r} = \text{arc. FE.}$  & AM.MP :: AE.EK; hoc

est,  $k.m :: r. \frac{rm}{k} = \text{EK}$ ; item AE.EK :: arc. FE.LK. hoc

est  $r. \frac{rm}{k} :: \frac{pa}{r} \frac{pma}{rk} = \text{LK}$ . Verum AM.AE :: AP.AK;

hoc est  $k.r :: f. \frac{rf}{k} = \text{AK}$ . ergò  $\frac{rf}{k} - \frac{pma}{rk} = \text{AL}$ . Et  $\frac{rrff}{kk} -$

$\frac{2fmpa}{kk}$  (abjectis superfluis) = ALq; adeoque LFq =

$$\frac{rrkk - rrff + 2fmpa}{kk} = \frac{rrmm + 2fmpa}{kk}$$

Est autem AQq. QNq :: ALq. LFq; hoc est Q:  $f - e$ .

Q:  $m + a$  :: ALq. LFq. hoc est  $ff - 2fe.m + 2ma ::$   
 $rrff - 2fmpa.rrmm + 2fmpa$ . Unde (sublatis ex norma rejectaneis) emerget æquatio,  $ffpa + mmpa - rrf a = rrme$ ; seu

$kkpa - rrf a = rrme$ ; vel substituendo juxta præscriptum;  $kkpm - rrfm$   
 $= rrmt$ ; vel  $\frac{kkp}{rr} - f = t$ . Hinc colligitur esse rectam AT =

$\frac{kk}{rr}p$ ; hoc est (quoniam, ut notum est,  $AV = \frac{rr}{p}$ ) erit AT =

$\frac{AMq}{AV}$ ; seu, AV.AM :: AM.AT.

## Exemp. V.

Fig. 120.

121.

Sit DEB *Quadrans Circuli*, quem tangat recta BX; tum linea AMO talis, ut in recta AV utcumque sumptâ AP, quæ arcum BE adæquet, erectâque PM ad AV normali, sit PM æqualis arcûs BE tangenti BG.

Sumpto arcu BF = AQ; & ductâ CFH; demissis EK, FL ad CB normalibus; nominentur CB = r. CK = f: KE = g. Et quoniam est CE. EK :: arc. EF. LK; vel CE. EK :: QF.

LK; hoc est  $r. g :: e. \frac{g^e}{r} = LK$ ; erit  $CL = f + \frac{g^e}{r}$ . Et LF

$$= \sqrt{rr - ff - \frac{2fg^e}{r}} = \sqrt{gg - \frac{2fg^e}{r}}$$

Est autem CL.LF :: (CB.BH::) CB.QN. hoc est,  $f + \frac{g^e}{r} \sqrt{gg - \frac{2fg^e}{r}} :: r.m - a$ . vel (quadrando)  $ff + \frac{2fg^e}{r} \sqrt{gg - \frac{2fg^e}{r}} :: rr.m - 2ma$ . Unde (dimissis quæ

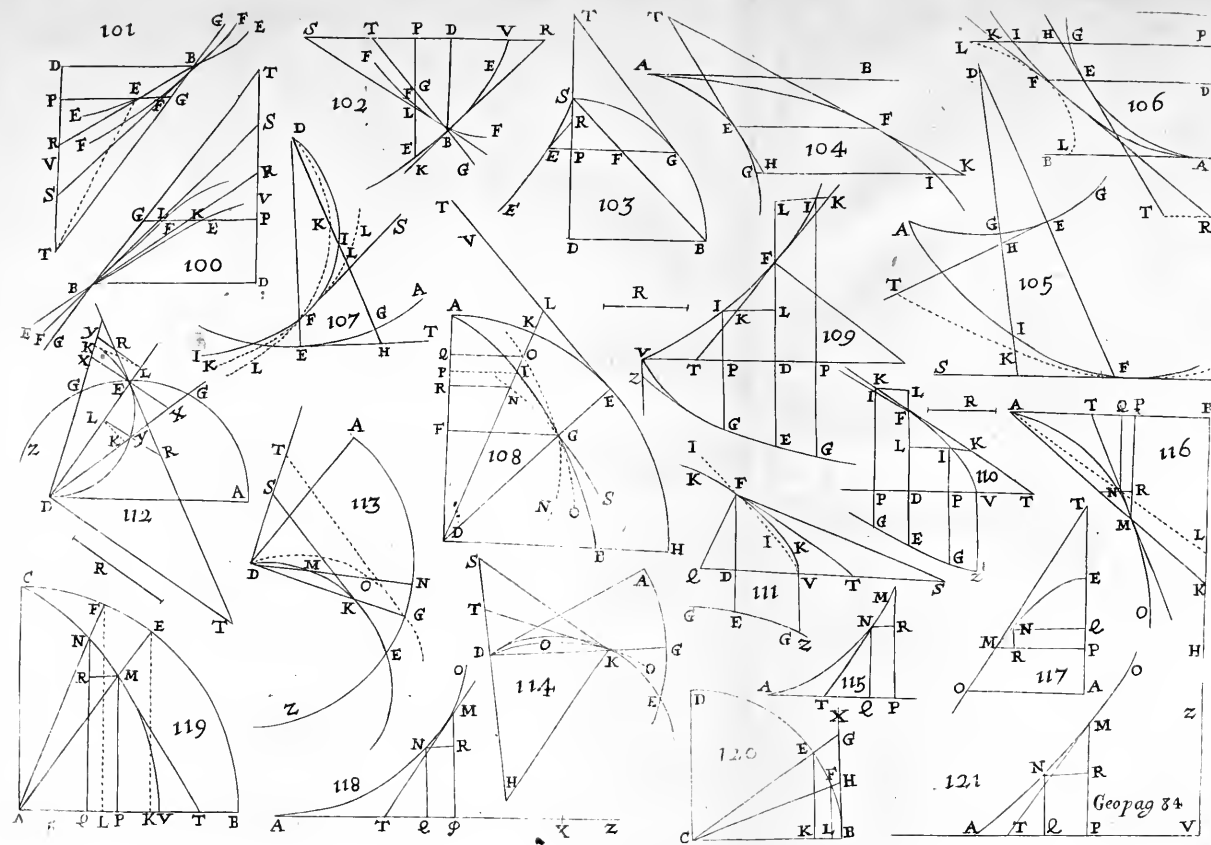
oportet) obtinetur æquatio,  $r f m a = g r r e + g m m e$ . unde substituendo,  $e r f m m = g r r i + g m m t$ . vel  $\frac{r f m m}{g r r + g m m} = t$ .

seu (quoniam est  $m = \frac{r g}{f}$ ) erit  $t = \frac{r r}{r r + m m} m = \frac{C B q}{C G q} B G =$

$$\frac{C K q}{C E q} B G.$$

Hæc sufficere videntur huic methodo elucidandæ.







## LECT. XI.

**R** Eliquis utcumque patrat, apponemus iam *quæ ad magnitudinum è tangentibus* ( seu è perpendicularibus ad curvas ) *Dimensiones eliciendas pertinentia se objecerunt Theoremata* ; de compluribus utiq; selectiora quædam.

I. Sit curva quæpiani  $VH$  (cujus axis  $VD$ , applicata  $HD$  ad  $VD$  normalis) item linea  $Z\downarrow$  talis, ut si à curvæ puncto liberè sumpto (puta  $E$ ) ducatur recta  $EP$  ad curvam perpendicularis, & recta  $EAZ$  ad axem perpendicularis, sit recta  $AZ$  interceptæ  $AP$  æqualis, erit spatium  $AD\downarrow\phi$  æqualis semissi quadrati ex recta  $DH$ .

Fig. 122.

Nam sit angulus  $HDO$  semirectus ; & æquisecetur recta  $VD$  indefinitè punctis  $A, B, C$  ; per quæ ducantur rectæ  $EAZ, FBZ, GCZ$ , ad  $HD$  parallelæ ; curvæ occurrentes in  $E, F, G$  ; à quibus rectæ  $EIY, FKY, GLY$  ad  $VD$  (vel  $HO$ ) parallelæ ducantur ; quin & rectæ  $EP, FP, GP, HP$  curvæ  $VH$  perpendiculares sint ; lineæ verò se interfecent, ut vides. Estque triangulum  $HLC$  simile triangulo  $PDH$  (nam ob indefinitam sectionem curvula  $GH$  pro rectâ haberi potest) quare  $HL : LG :: PD : DH$ . adeoque  $HL \times DH = LG \times PD$  ; hoc est  $HL \times HO = DC \times D\downarrow$ . Simili monstrabitur discursu, quoniam triangulum  $GME$  triangulo  $PCG$  assimilatur, fore  $LK \times LY = CB \times CZ$  ; & similiter  $KI \times KY = BA \times BZ$  ; itidem denuò  $ID \times IY = AV \times AZ$  ; unde constat triangulam  $HDO$  (quod à rectangulis  $HL \times HO + LK \times LY + KI \times KY + ID \times IY$  minimè differt) æquari spatio  $VD\downarrow\phi$  (quod itidem à rectangulis  $DC \times D\downarrow + CB \times CZ + BA \times BZ + AV \times AZ$  minimè differt) ; hoc est  $\frac{DH\phi}{2}$  æquari spatio  $VD\downarrow\phi$ .

Longior discursus apagogicus adhiberi possit, at quorsum ?

II. Iisdem.

Fig. 122. II. Iisdem positis, atque paratis, *summa rectangulorum*  $AZ \times AE + BZ \times BF + CZ \times CG$ , &c. æquatur *trienti cubi* ex base DH.

Nam ob  $HL : LG :: PD : DH :: PD \times DH : DHq$ , erit  $HL \times DHq = LG \times PD \times DH$ . hoc est  $HL \times HOq = DC \times D \downarrow \times DH$ . Similique discursu,  $LK \times LYq = CB \times CZ \times CG$ . &  $KI \times KYq = BA \times BZ \times BF$ , &c. Verum  $HL \times HOq + LK \times LYq + KI \times KYq$ , &c. adæquant trientem cubi ex DH; itaque liquet Propositum.

III. Simili ratione constabit summam  $AZ \times AEq + BZ \times BFq + CZ \times CGq$ , &c. æquari  $\tau\tilde{\omega} \frac{DHq^2}{4}$ ; & esse summam  $AZ \times AE \text{ cub.} + BZ \times BE \text{ cub.} + CZ \times CG \text{ cub.}$  &c.  $= \frac{DH^3}{5}$ ; ac eodem in continuum tenore.

Fig. 122. IV. Exhinc cōsestantur haud aspernanda *Theoremata*: Sit  $VD \downarrow \phi$  spatium quodlibet, cujus axis  $VD$ , ut dictum, æquisectus; si concipiantur singula spatia  $VAZ \phi$ ,  $VBZ \phi$ ,  $VCZ \phi$ , &c. in suas ordinatas  $AZ$ ,  $BZ$ ,  $CZ$ , &c. respectivè singulas duci, quæ proveniet summa adæquabitur ipsius spatii  $VD \downarrow \phi$  semiquadrato.

Nam (ut prius ostensum) figuræ  $VD \downarrow \phi$  adaptari potest spatium  $VDH$ ; tale nimirum, ut ducta quâvis ad curvam  $VH$  perpendiculari, ceu  $EP$ , sit  $AP$  sibi respondententi applicatæ  $AZ$  æqualis; (b) unde fiet spatium  $VAZ \phi = \frac{AEq}{2}$ ; &  $VBZ \phi = \frac{BFq}{2}$ ; &  $VCZ \phi = \frac{CGq}{2}$  &c. quapropter omnia  $VAZ \phi \times AZ + VBZ \phi \times BZ + VCZ \phi \times CZ$ , &c. æquabuntur omnibus  $AEq \times AZ + BFq \times BZ + CGq \times CZ$

(c) 3 hujus.

(c) hoc est  $\tau\tilde{\omega} \frac{DHq^2}{4 \times 2}$ ; (b) hoc est  $\tau\tilde{\omega} \frac{VD \downarrow \phi \times VD \downarrow \phi}{2}$ .

V. Quod si ducantur omnia  $\sqrt{VAZ \phi}$ ,  $\sqrt{VBZ \phi}$ ,  $\sqrt{VCZ \phi}$ , &c. in suas applicatas  $AZ$ ,  $BZ$ ,  $CZ$ , &c. respectivè proveniet aggregatum æquale duabus tertiis radicis quadratæ facti ex ipso spatio  $VD \downarrow \phi$  cubato ( $\tau\tilde{\omega} \frac{2}{3} \sqrt{VD \downarrow \phi^3}$ .)

Nam adaptatâ curvâ  $VH$ , est  $\sqrt{VAZ \phi} = AE \sqrt{\frac{1}{2}}$ ; &  $\sqrt{VBZ \phi} = BF \sqrt{\frac{1}{2}}$ , &  $\sqrt{VCZ \phi} = CG \sqrt{\frac{1}{2}}$ , &c. Cum itaque sint omnia

omnia  $AZ \times AE \dashv BZ \times BF \dashv CZ \times CG$ , &c.  $= \frac{DH \text{ cub.}}{3}$   
 erunt omnia  $AZ \times \sqrt{VAZ} \dashv BZ \times \sqrt{VBZ} \dashv CZ \times \sqrt{VCZ}$ , &c.  $= \frac{DH \text{ cub.}}{3} \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{DH^6}{18}}$ . Est autem  $DHq = 2VD \downarrow \phi$ , vel  $DH^6 = 8VD \downarrow \phi^3$ ; quapropter omnia  $AZ \times \sqrt{VAZ} \dashv BZ \times \sqrt{VBZ} \dashv CZ \times \sqrt{VCZ}$ , &c.  $= \sqrt{\frac{8}{18}} VD \downarrow \phi^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{VD \downarrow \phi^3}$ .

VI. *Exempla.* Sit  $VD \downarrow$  circuli quadrans (cujus radius dicatur  $R$ , & Peripheria  $P$ ) segmenta  $VAZ$ ,  $VBZ$ ,  $VCZ$ , &c. in sinus rectos  $AZ$ ,  $BZ$ ,  $CZ$ , &c. ducta conficiant  $\frac{RqPq}{8}$ .

Fig. 123.

Item Summa  $AZ \sqrt{VAZ} \dashv BZ \sqrt{VBZ} \dashv CZ \sqrt{VCZ}$ , &c.  $= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{R^3 P^3}{8}} = \sqrt{\frac{R^3 P^3}{8}}$ .

Si  $VD \downarrow$  sit parabolæ segmentum, factum è segmentis in applicatas erit  $\frac{2}{9} VDq \times A \downarrow q$ ; ac è radicibus segmentorum in applicatas factum erit  $\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{7}} VD^{\frac{3}{2}} \times D \downarrow^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{3}{4}} VD^{\frac{3}{2}} \times D \downarrow^{\frac{3}{2}}$ .

Similia plura de factis è segmentorum potestatibus, aut radicibus aliis in applicatas, aut sinus ductis, hinc extundi possent.

VII. E dictis porro sequitur, si omnes (vertici, & perpendicularibus interjectæ)  $VP$  per respectiva puncta  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , &c. Concipiantur applicatæ, puta ut  $AY$ ,  $BY$ ,  $CY$ , &c. respectivis  $VP$  æquantur; erit è sic applicatis constitutum spatium  $AD \frac{2}{3} \theta$  æquale semisse quadrati ex subtensa  $VH$ .

Nam, ob omnes  $VA \dashv VB \dashv VC$ , &c.  $= \frac{VDq}{2}$  & omnes  $AP \dashv BP \dashv CP$ , &c.  $= \frac{DHq}{2}$ , liquet fore omnes  $VP = \frac{VHq}{2}$ .

VIII. Porro, si (positis iisdem) sit curva  $RXXS$  talis, ut sit  $IX = AP$ , &  $KX = BP$ , &  $LX = CP$ , &c. erit solidum factum ex spatio

spatio  $VD\downarrow$  circa axem  $VD$  rotato subduplum solidi ex spatio  $DRSH$ , itidem circa axem  $VD$  rotato, confecti.

Nam ob  $HL.LG::PD.DH::D\downarrow.DH::D\downarrow q.D\downarrow \times DH::D\downarrow q.HS \times DH$ , erit  $HL \times HS \times DH = LG \times D\downarrow q. = DC \times D\downarrow q$ . Simili planè discursu erit  $LK \times LX \times DL = CB \times CZ q$ ; &  $KI \times KX \times DK = BA \times BZ q$ , &c. atqui solidum prius est  $\frac{\pi}{3}: AZ q + BZ q + CZ q$ , &c. & solidum posterius est  $\frac{2\pi}{3}: DI \times IX + DK \times KX + DL \times LX$ , &c. itaque constat Propositum.

Fig. 124.

IX. Hæc itidem omnia simili ratione vera sunt, etiam si curva  $VEH$  rectæ  $VD$  convexas suas partes obvertat; nempe quovis in curva accepto puncto  $E$ ; & per hoc ductâ  $EP$  ad curvam  $VEH$  perpendiculari, &  $EAY$  ad rectam  $VD$  normali, factâque  $AZ = AP$ ; erit spatium  $VD\downarrow = \frac{DH q}{2}$ . Sin quoque fiat  $AY = VP$ ; erit spatium  $VD\xi = \frac{VH q}{2}$ . Et pariter quoad cætera.

Ex his verò *Theorematis quam innumerarum magnitudinum* (ex ipsarum immediate constructione) *dimensiones innotescant*, ab experientia faciliè comperietur.

Fig. 125.

X. Sit rursus curva quæpiam  $VH$  (cujus axis  $VD$ , basis  $DH$ ) & linea  $DZZO$  talis, ut à curvæ puncto quopiam, ceu  $E$ , ductâ rectâ  $ET$ , quæ curvam tangat, & rectâ  $EIZ$  ad basin parallelâ, sit perpetuò  $I Z$  æqualis ipsi  $AT$ ; dico spatium  $DHO$  spatio  $VDH$  æquari.

Æquifecetur enim recta  $DH$  indefinitè, punctis  $I, K, L$ , per quæ ducantur rectæ  $EIZ, F K Z, G L Z$  ad  $VD$  parallelæ, curvæque occurrentes ad  $E, F, G$ , unde ducantur rectæ  $EA, FB, GC$  ad  $HD$  parallelæ, rectæque  $ET, FT, GT$  (ut &  $HT$ ) curvam tangentes; lineæ verò se, ut Schema monstrat, interfecent. Estque jam triangulum  $GLH$  simile triangulo  $TDH$  (nam ob divisionem istam indefinitam arcus  $GH$  rectæ iastar censerî potest, eatenus tangenti  $HT$  coincidens) quare  $LG.LH::TD.DH$ ; &  $LG \times DH = LH \times TD$ ; seu  $CD \times DH = LH \times HO$ . simili ratiocinio est  $BC \times$   
CG

$CG = KL \times LZ$ ; &  $AB \times BF = IK \times KZ$ , &  $VA \times AE = DI \times IZ$ . Verum summa  $CD \times DH \dashv BC \times CG \dashv AB \times BF \dashv VA \times AE$  à spatio  $VDH$  minimè differt; & summa  $LH \times DO \dashv KL \times LZ \dashv IK \times KZ \dashv DI \times IZ$  à spatio  $DHO$  minimè differt. itaque spatio  $VDH$ ,  $DHO$  æquantur.

Hoc *perutile Theorema* doctissimo Viro *D. Gregorio Aberdonensi* debetur; cui sequentia subnectimus.

XI. Iisdem positis; solidum ex spatio  $DHO$  circa axem  $VDR$  rotato factum duplum erit solidi facti ex spatio  $VDH$  itidem circa axem  $VD$  rotato. Fig. 125.

Nam est  $HL : LG :: (DH : DT :: DH : HO ::) DHq : DH \times HO$ . unde  $HL \times DH \times HO = LG \times DHq = CD \times DHq$ . Similique discursu sunt  $LK \times DL \times LZ = BC \times CGq$ . &  $KI \times DK \times KZ = AB \times BFq$ . & demum  $ID \times DI \times IZ = VA \times AEq$ . Est autem (ut vulgò notatum habetur) summa  $CD \times DHq \dashv BC \times CGq \dashv AB \times BFq \dashv VA \times AEq$  dupla summæ  $DI \times IE \dashv DK \times KF \dashv DL \times LG$ , &c. Quare solidum ex spatio  $HDO$  circa axem  $DR$  converso factum duplum est solidi, quod è spatio  $VDH$  circa  $VD$  converso producitur.

XII. Hinc, summa  $DI \times IZ \dashv DK \times KZ \dashv DL \times LZ$ , &c. æquatur summæ quadratorum ex applicatis ad  $VD$ ; scilicet ipsis  $AEq \dashv BFq \dashv CGq$ , &c.

XIII. Simili ratiocinio constabit summam  $DIq \times IZ \dashv DKq \times KZ \dashv DLq \times LZ$ , &c. triplam esse summæ  $DIq \times IE \dashv DKq \times KF \dashv DLq \times LG$ , &c. hoc est æqualem summæ cuborum ab omnibus  $AE$ ,  $BF$ ,  $CG$ , &c. ad  $VD$  applicatis. Idem quoad reliquas potestates observabilis est Conclusionum tenor.

XIV. Iisdem positis; si  $DXH$  sit linea talis, ut quævis ad  $DH$  ordinata, ceu  $IX$ , sit media proportionalis inter sibi congruas ordinatas  $IE$ ,  $IZ$ ; erit solidum ex spatio  $VDH$  circa axem  $DH$  rotato duplum solidi ex spatio  $DXH$  circa eundem axem  $DH$  converso procreati.

Nam ob  $VA \times AE = DI \times IZ$ , erit  $VA \times AE \times EI = DI \times IZ \times IE = ID \times IXq$ . Similique de causa  $AB \times BF \times FK = IK \times KXq$ ; &  $BC \times CG \times GL = KL \times LXq$ , &c. Est autem summa  $VA \times AE \times EI \dashv AB \times BF \times FK \dashv BC \times CG \times GL$ , &c. Subdupla summæ

$m\grave{a} V D q + E I q + F K q + G L q$ ; ergò summa  $I X q + K X q + L X q + H X q$ , subdupla est summa  $V D q + E I q + F K q + G L q$ . Vnde liquet Propositum.

XV. Quòd si curva  $D X H$  talis concipiatur, ut sit ordinata quæpiam, ceu  $I X$ , inter congruas ordinatas  $I E$ ,  $I Z$  bimedia \*, erit summa cuborum ex  $I X$ ,  $K X$ ,  $L X$ , &c. subtripla cuborum ex  $D V$ ,  $I E$ ,  $K F$ , &c. Sin  $I X$  sit trimed. \* erit  $I X q q + K X q q + L X q q$ , &c. =  $\frac{D V q q + I E q q + K F q q}{4}$

&c. ac ità porrò quoad cæteras potestates. \* Not. bimediam appello, quæ duarum mediarum proportionalium prima; trimediam, quæ trium prima est, &c.

Hæc simili ratione colliguntur, ac comprobantur. piget  $\kappa\alpha\kappa\alpha\zeta\iota$ .

XVI. Sit porrò linea  $V Y Q$  talis, ut ordinata  $A Y$  ipsi  $A T$ ; & ordinata  $B Y$  ipsi  $B T$ , &c. æquantur; erit  $I Z q + K Z q + L Z q$ , &c. (summa quadratorum ex ordinatis à curva  $D Z O$  ad rectam  $D H$ ) æqualis summa  $V A \times A E \times A Y + A B \times B F \times B Y + B C \times C G \times C Y$ , &c. (hoc est figuræ  $V D H$  in figuram  $V D Q$  ductæ).

XVII. Item, summa  $I Z$ . cub.  $+ K Z$  cub.  $+ L Z$  cub. &c. =  $V A \times A E \times A Y q + A B \times B F \times B Y q + B C \times C G \times C Y q$ , &c. hoc est figuræ  $V D H$  in figuræ  $V D Q$  quadrata ductæ). Similis & aliarum potestatum est ratio.

Ad superiorum normam hæc facilè colliges.

Fig. 126.

XVIII. Eadem vera sunt, & omnino simili ratione comprobantur, Etiam si curvæ  $V H$  convexa rectæ  $V D$  obvertantur. Nempe, si linea  $D Z O$  talis sit, ut ductâ per quodvis in curva  $V H$  punctum  $E$  tangente  $E T$ , &  $E A$  ad  $H D$  parallêlâ, ac  $E I Z$  ad  $V D$  parallêlâ, sit perpetim  $I Z = A T$ , erit spatium  $D H O$  spatio  $V D H$  æquale, & solidum factum ex spatio  $D H O$  circa axem  $V R$  converso duplum erit solidi ex spatio  $V D H$  circa eundem axem  $V D$  rotato producti. quia & reliqua pari modo convenient.

Fig. 127.

XIX. Porrò, sit curva quæpiam  $A M B$ , cujus axis  $A D$ , & huic perpendicularis  $B D$ ; tum alia sit linea  $K Z L$  talis, ut sumpto in curva  $A B$  utcunque puncto  $M$ ; & per hoc ductis rectâ  $M T$  curvam  $A B$  tangente, rectâ  $M F Z$  ad  $B D$  parallêlâ (quæ lineam  $K L$  secet in  $Z$ , rectam  $A D$  in  $F$ ) datâque quâdam lineâ  $R$ ; sit  $T F$ .  $F M ::$

$R$ .



R. FZ; erit spatium ADLK æquale rectangulo ex R, & DB.

Nam sit  $DH = R$ ; & compleatur rectangulum BDHI; tum assumptâ MN indefinite parvâ curvæ AB particulâ ducantur NG ad BD; & MEX, NOS ad AD parallelæ. Estque NO. MO :: TF. FM :: R. FZ. Unde  $NO \times FZ = MO \times R$ ; hoc est  $FG \times FZ = ES \times EX$ . ergo cum omnia rectangula  $FG \times FZ$  minimè differant à spatio ADLK; & omnia totidem rectangula  $ES \times EX$  componant rectangulum DHIB, satis liquet Propositum.

XX. Iisdem positis, sit curva PYQ talis, ut sumpta in sumpta recta MX ordinata EY (respectivæ) ipsi EZ æquetur, erit *summa quadratorum* ex FZ (ad rectam AD computata) par ei quod fit ex ipsa R in *spatium* DBQB ducta.

Est enim  $EG.ES :: NO.MO :: R \times FZ. FZq :: R \times EY. FZq$ . adeoque  $FG \times FZq = ES \times R \times EY$ .

XXI. Simili ratione *summa Cuborum* ex FZ æquatur ei quod fit ex R in summam quadratorum ex rectis EY ad B D applicatis. neque non simili quoad reliquas potestates tenore.

Fig. 128.

XXII. Sit curvâ quævis DOK, in qua designatum punctum D; & subtensa recta DK; sit item curva AE talis, ut à D projectâ quavis rectâ DMF (quæ curvas secet punctis M, F) duetisque DS ad DM normali, & MS curvam DOK tangente (concurrentibus utiq; puncto S) datâque quâdam R, sit DS.  $\therefore R :: DMq. DFq$ ; erit spatium ADE æquale ex R, DK.

Nam subtensa DK indefinite secta concipiatur punctis PQ, &c. per quæ centro C descripti transeant arcus PM, QRN; curvam DOK secantes punctis M, N; per quæ ducantur rectæ DMF, DNG; sint verò DT ad DK; & DS ad DM perpendiculares; quibus occurrant tangentes KT, MS. demùm centro D per E ducatur arcus EX; & per F arcus FY. Jam, ob sectionem indefinitam, est triangulum KPM triangulo KDT simile. ac ideò  $MP.PK :: TD.DK$ . item est  $DP.PM :: DE.EX$ . seu, propter assignatam causam,  $DK.MP :: DE.EX$ . Est itaque  $MP \times DK.PK \times MP :: TD \times DE.DK \times EX$ . hoc est  $DK.PK :: TD \times DEq. DK \times EX \times DE$ . ac inde  $DKq \times EX \times DE = PK \times TD \times DEq$ . (a) Est autem  $DT. \therefore R :: DKq. DEq$ ; seu  $DT \times DEq = \therefore R \times DKq$ . ergo est  $DKq \times EX \times DE = PK \times \therefore R \times DKq$ . quare  $EX \times DE = \therefore R \times PK$ ; hoc est,  $\therefore$  sector DEX =  $\therefore R \times PK$ . Simili planè discursu sector DFY æquatur

æquatur ipsi  $R \times RM$ , vel  $R \times QP$ . itaque totum spatium  $ADE$  quod ab ejusmodi sectoribus minimè differt adæquatur toti  $R \times DK$ . quod erat Propositum.

Fig. 128.

XXIII. Iisdem, quoad cætera, positis atque paratis, ducantur  $KH$  ad  $KT$ , &  $MI$  ad  $MS$  perpendiculares; & concipiatur jam curva  $AE$  naturâ talis, ut sit  $DE = \sqrt{DK \times DH}$ ; &  $DF = \sqrt{DM \times DI}$ ; ac ita perpetuò; erit spatium  $ADE$  quadrati ex  $DK$  subquadrum.

Nam est  $MP \cdot PK :: DK \cdot DH :: DKq \cdot DK \times DH :: DKq \cdot DEq$ . item  $DP \cdot PM :: DE \cdot EX$ , hoc est  $DK \cdot PM :: DE \cdot EX$ . ergò  $MP \times DK \cdot PK \times PM :: DKq \times DE \cdot DEq \times EX$ . hoc est  $DK \cdot PK :: DKq \cdot DE \times EX$ . vel  $DKq \cdot DK \times PK :: DKq \cdot DE \times EX$ . unde  $DK \times PK = DE \times EX$ . Simili ratione  $DM \times MR$  (vel  $DP \times PQ$ )  $= DF \times FY$ . Verùm omnia  $DK \times PK$ ,  $DP \times PQ$ , &c. æquantur semissi quadrati ex  $DK$ ; & omnia  $DE \times EX$ ,  $DF \times FY$ , &c. æquantur duplo spatio  $EDA$ ; unde manifeste consequitur Propositum.

Fig. 129.

XXIV. Sit curva quæpiam  $DOK$ , in qua punctum  $D$ ; cuique subtendatur recta  $DK$ ; sit item curva  $DZ$  talis, ut sumpto in curva  $DOK$  puncto quopiam  $M$ , connexâque  $DM$ ; & ductâ  $DS$  ad  $DM$  perpendiculari, &  $MS$  curvam  $DOK$  tangente; sumptâ demum  $DP = DM$ , & ductâ  $PZ$  ad  $DK$  perpendiculari, sit  $PZ = DS$ ; erit spatium  $DKI$  æquale duplo spatio  $DKO$ .

Nam recta  $KP$  concipiatur indefinitè parva; &  $DT$  ipsi  $DK$  perpendicularis sit, &  $KT$  curvam  $DOK$  tangat. Est itaque (ducto arcu  $MP$ ) rursus  $KP \cdot PM :: KD \cdot DT :: KD \cdot KI$ . unde  $KP \times KI = PM \times KD$ . Capiatur alia particula  $PQ$ , & centro  $D$  per  $Q$  ducatur arcus  $QN$ , quem secet subtensa  $DM$  in  $R$ ; est ergò rursus  $MR \cdot RN :: MD \cdot DS$ ; hoc est  $PQ \cdot RN :: MD \cdot PZ$  quare  $PQ \times PZ = RN \times MD$ ; ac ita continuò deinceps. patet igitur omnia simul rectangula  $KP \times KI$ ,  $PQ \times PZ$ , &c. æquari aggregato omnium  $PM \times KD$ ,  $RN \times MD$ , &c. hoc est spatium  $DKI$  duplo spatio  $DKO$  æquari.

Fig. 130.

XXV. Iisdem quoad cætera positis atque paratis, ordinatæ  $PZ$  jam æquales concipiantur ipsis  $MS$  respectivis; & ad rectam assumptam  $Xk$ , distantiasque  $Xk$ ,  $Xm$ ,  $Xn$ , &c, æquales ipsis curvæ partibus  $DOK$ ,  $DOM$ ,  $DON$ , &c. applicentur rectæ  $k d$ ,  $m d$ ,  $n d$ , &c. pares

pares subtensis  $KD, MD, ND$ ; &c. erit spatium  $Xkd$  æquale spatium  $DKI$ .

Nam est  $KM.KP::KT.KD$ ; hoc est  $km.KP::KI.kd$ . unde  $km \times kd = KP \times KI$ . Similique pacto,  $MN.MR::MS.MD$ . seu  $mn.PQ::PZ.md$ . unde  $mn \times md = PQ \times PZ$ . ac ita deinceps. unde constat Propositum.

XXVI. Sin porro, persistentibus reliquis, adsumptâ quâvis rectâ.  $kg$ , completôque rectangulo  $Xkgh$ , curva  $DZ$  talis intelligatur, ut sit  $MD.MS::kg.PZ$ ; erit rectangulum  $Xkgh$  æquale spatium  $DKI$ . Fig. 130.

Nam est rursus  $KP.KM::KD.KT::kg.KI$ . adeoque  $KP \times KI = (KM \times kg) = km \times kg$ . Similiterque  $PQ \times PZ = mn \times kg$ . ac ita semper. Unde constat.

Hinc noto spatium  $DKI$  cognoscetur quantitas curvæ  $DOK$ .

Hujusmodi verò complura deprehender quisquis hanc *Mineram* penitus explorârit, ac excusserit. Faciat cui id vacat & adlubescit.

XXVII. Usui fortè nonnunquam erit (mihi subinde fuit) & hoc, è præmissis deductum Theorema.

Sit curva quæpiam  $VEH$  (cujus axis  $VD$ , basis  $DH$ ) quam tangat utcunque recta  $ET$ ; & ducatur  $EA$  ad  $HD$  parallela. tum altera statuatur curva  $GZZ$  talis, ut à puncto  $E$  ductâ rectâ  $EZ$  ad  $VD$  parallelâ (quæ basin  $DH$  in  $I$ , curvam  $GZZ$  in  $Z$  fecet) adsumptâque quâpiam determinatâ  $R$ , sit semper  $DAq.Rq::DT.IZ$ ; erit  $DA.AE::Rq$  spat.  $DIZG$ . (vel facto  $DA.R::R.DP$ ; ductâque  $PQ$  ad  $DH$  parallelâ, erit Rectangulum  $DPQI$  par spatium  $DGZI$ ).

Fig. 131.

Etiâ hoc adjiciatur *Theorema*; nonnunquam usui futurum.

XXVIII. Sit curva quælibet  $AMB$  (cujus axis  $AD$ ); sit item linea  $KZL$  proprietate talis, ut sumpto in  $AMB$  quocunque puncto  $M$ , & ab eo ductis rectâ  $MP$  ad curvam  $AB$  perpendiculari (quæ axem  $AD$  fecet in  $P$ ) & rectâ  $MG$  ad  $AD$  perpendiculari (quæ curvam  $KZL$  fecet in  $Z$ ) sit constantè  $GM.MP::$  arc  $AM.GZ$ ; erit spatium  $ADKL$  æquale semissi quadrati ex arcu  $AM$ . Fig. 132.

Hæc inquam, è præcedentibus haud. magnâ o perâ colligantur, id verò sufficiat admonitum; etenim hic animus est paulo subsistere.

## APPENDICULA.

I. **C**Um pridem ante plures annos illustris Viri, *Christiani Hugeni, Cyclometrica* lustrarem, ac in eo versatus adverterem ad id negotii duas præsertim ab ipso methodos adhiberi; quarum una *Circuli segmentum* duobus parabolicis (uni inscripto, alteri adscripto) medium esse monstrans, illius inde magnitudini limites præscribit; altera *Parabolici segmenti*, & *Parallelogrammi* æquè altorum centris gravitatum medium interjacere centrum gravitatis circularis segmenti ostendens, alteros exindè limites, adsignat; incidit mihi cogitatio posse loco parabolæ in prima methodo, nec non vice Parallelogrammi in secunda, paraboliformium aliquam circulari segmento circumscriptibilem usurpari, sic ut res aliquanto propiùs attingatur; id mox verum esse re perpensâ comperi, quin & prætereà notavi facilè sup-pares methodos *Hyperbolici segmenti dimensionum* accommodari. Quorum demonstratiò (præ aliis fortasse, quæ excogitari possent) brevis & clara cum è suprà positis consequatur aut pendeat, eam (alioquin opinor haud injucundam) hîc visum est apponere.

Fig. 133.

II. Adsumimus autem hæc pervulgata; quorûmque demonstrationes è præmonstratis haud difficilè variis modis colligantur; si *paraboliformis* B A E (cujus *Axis* A D, *Basis* vel ordinata B D E, *Tangens* B T; *Gravitatis centrum* K) exponens sit  $\frac{n}{m}$ ; erit *Area* B A E

$$= \frac{m}{n-1} A D \times B E; \text{ \& } T D = \frac{m}{n} A D, \text{ \& } K D = \frac{m}{n-1-2m} A D.$$

Fig. 134.

III. Sint duæ quævis curvæ A E B, A F B (quarum communis axis A D, ordinata D B) ità se habentes, ut ductâ quâcunque rectâ E F G ad B D parallêlâ, quæ lineas expositas punctis E, F, G secet, positòque quòd rectæ E S, F T tangant curvas, (illa curvam A E B, hæc ipsam

ipsam AFB) sit perpetuo TG major quàm SG; dico nullam curvæ AFB partem intra ipsam AEB cadere.

Si fieri potest, cadat pars NEM; ita scilicet ut curva AFB curvam AEB interfecet punctis M, N; his autem interjecta concipiatur indeterminatè ordinata EFG; sint verò lineæ LKX, RYQ tales, ut ductis rectis EO, FP ad ipsas ES, FT perpendicularibus, protrahatque recta EG, ut hæc distas lineas LK, QR secet punctis X, Y; sit GX = GO, & GY = GP. Jam ex ostensis patet esse spatium

$$IHLK = \frac{HMq - INq}{2} = \text{spat. IHQR}; \text{adeoq; spat. IHLK, IHQR}$$

æquari. Verùm ob GE. GO(GX)::SG; GE.  $\rightarrow$  SG. GF  $\rightarrow$  TG. GF::GF. GP(GY)  $\rightarrow$  GE. GY; est GX  $\leftarrow$  GY; adeoque (cùm hoc ubique similiter contingat) spatium IHLK majus spatio IHQR, quod repugnat ostenso. itaque liquet Propositum.

Hinc tota AFB extra totam AEB jacet, nec illa hanc usquam interfecat.

IV. Sit curva quæpiam BAE, cujus axis AD, & ad hunc ordinata basis ADE; segmenti verò BAE centrum gravitatis sit punctum H, quod ducta sit recta RS ad BE parallela. Porro per puncta R, S transeat altera curva (vel linea quævis) MRASN, habens itidem axin AD, ac ita priorem curvam BAE secans, ut ejusce pars superior RKAP sintra curvam BAE cadat, inferiores verò reliquæ partes RM, SN extra eandem; erit segmenti MRASN centrum gravitatis infra punctum H, versus basin MN.

Fig. 135.

Nam è segmento RIAOS ablatum RIAK  $\rightarrow$  AOSP residuum BRKAPSE deprimet versus basin BE, puta ut jam sit hujus residui Centrum gravitatis ad X; tunc adjunctum BRM  $\rightarrow$  ESN adhuc totum MRKAPS N magis deprimet; adeoque centrum ejus infra X consistet, velut ad Y. itaque constat Propositum.

V. Circulum AFB, cujus Centrum C, tangant duæ rectæ BT, ES Diametro CA occurrentes punctis T, S; & ad CA perpendiculares sint rectæ BD, EP; sit autem AD major quàm AP; erit TD. AD  $\leftarrow$  SP. AP.

Fig. 136.

Nam est CT. CA::CA. CD. Ideoque CT-CA. CA-CD::CT. CA; hoc est TA.AD::CT. CA. Simili ratione constabit esse SA.AP::CS. CA. Est autem CT. CA  $\leftarrow$  CS. CA. quare TA.AD  $\leftarrow$  SA.AP. vel componendo TD. AD  $\leftarrow$  SP. AP.

VI. Hyper-

Fig. 137.

VI. *Hyperbolam* AEB, cujus *Centrum* C, tangent duæ rectæ BT, ES, & reliqua ponantur ut in proximè præcedente; erit TD: AD  $\supset$  SP. AP.

Nam est CA. CD :: CT. CA. unde CA — CT. CD — CA :: CT. CA; hoc est TA. AD :: CT. CA. suppare discursu, est SA. AP :: CS. CA. Verùm est CT. CA  $\supset$  CS. CA. quare TA. AD  $\supset$  SA. AP; seu componendo TD. AD  $\supset$  SP. AP.

VII. *Circuli* AEB (cujus *Centrum* C) & *paraboliformis* AFB communes sint axis AD, & basis BD; sit autem *paraboliformis* exponens  $\frac{n}{m}$ ; & AD =  $\frac{m - 2n}{m - n}$  CA (vel  $m - n. m - 2n :: CA. AD$ ) *circulum* verò tangat recta BT; hæc quoque *paraboliformem* AFB continget.

Fig. 138.

Nam quia BT *circulum* tangit, est CT. CA :: CA. CD, unde TA. AD :: CACD. componendòque TD. AD :: CA + CD. CD. Item, quoniam est (ex hypothefi) CA. AD ::  $m - n. m - 2n$ ; erit per rationis conversionem CA. CD ::  $m - n. n$ . & componendo CA + CD. CD ::  $m. n$ . hoc est TD. AD ::  $m. n$ . unde (a) palàm fit, quòd BT *paraboliformem* AFB tangit.

(a) 2 hujus ap.

VIII. Subnotetur, quòd inversè, datà ratione ipsius AD ad CA designabitur hinc *paraboliformis*; quæ *Circulum* AEB ad B continget. Nempe, si AD =  $\frac{s}{t}$ , erit  $\frac{t - s}{2t - s}$  dictæ *paraboliformis* ex-

ponens. Nam posito fore  $\frac{t - s}{2t - s} = \frac{n}{m}$ ; erit ideò (juxta crucem multiplicando)  $mt - ms = 2tn - sn$ ; & transponendo  $mt - 2nt = ms - ns$ . ac ideò (æqualitatem ad analogismum redigendo)  $m - n. m - 2n :: t. s :: CA. AD$ . itaque constat ex antecedente Propositum.

IX. Manente quoad cætera septimæ hypothefi, *paraboliformis* AFB extra *circulum* AEB tota cadet.

Fig. 139.

Nam utcumque ducatur recta GEF ad DB parallela; quæ secet *circulum* ad E, *paraboliformem* in F; ductæque concipiantur rectæ ES *circulum*, & recta FR *paraboliformem* contingentes; Estque

RG.

RG. AG :: (a) m . n :: TD . AD (b)  $\sqsubset$  SG . AG. quare RG (a) 2. hujus.  
 $\sqsubset$  SG. unde (c) patet tota AFB extra circulum AEB jacere. app.  
 (b) 5. hujus ap.  
 (c) 3. hujus ap.

X. Reliquis itidem stantibus, si ad basin GE (utcumque parallelam ipsi DB) & axem AD conitutura intelligatur *paraboliformis* ejusdem cum Fig. 139.  
 ipsa AFB generis (nempe cujus etiam exponens  $\frac{n}{m}$ ) illa ad partes A supra GE, extra *circulum* tota jacebit.

Nam in arcu AE accepto quocumque puncto M, ductâque MP ad EG parallelâ, & MV circulum tangente; est VP. AP  $\sqsupset$  SG. AG  $\sqsupset$  RG. AG :: m . n; (a) itaque rursus liquet Propositum. (a) 3. hujus ap.

XI. Consectatur etiam dictam (ipsi AFB coordinatam & ad basin GE constitutam) *paraboliformem* infra GE ad DB protractam, catenus intra *Circulum* totam cadere, Fig. 139.

Quòd intra *Circulum* statim infra EG cadet ex eo patet, quòd ipsam tangens RE circulum secat (quia nempe SE circulum tangit) quòd alibi *Circulo* non occurreret hinc patet; quoniam posito quòd occurrat uspiam ad N, (a) tota supra N extra circulum caderet, contra quam modò dictum ac ostensum est. (a) 3. hujus ap.

XII. Porro, *Hyperbolæ* AEB (cujus centrum C) & *paraboliformis* AFB, cujus exponens  $\frac{n}{m}$ , communes sint axis AD, basis DB; Fig. 140.  
 sit autem  $AD = \frac{2n - m}{m - n} CA$ ; & BT *hyperbolam* tangat; hæc quoque *paraboliformem* AFB contingeret.

Nam est CD.CA :: CA.CT. ac inde AD.TA :: CD.CA; inversèq; componendo TD.AD :: CA + CD.CD. Verùm ex hypothesi, est  $m - n . 2n - m :: CA . CD$ ; adeoque inversè componendo CA . CD ::  $m - n . n$ . & rursus componendo CA + CD.CD :: m . n. hoc est TD . AD :: m . n. unde BT *hyperboliformem* contingit.

XIII. Hinc rursu datâ ratione ipsius AD ad CA, *paraboliformis* ad punctum B *hyperbolam* contingens designabitur. nempe sit  $AD =$

$$\frac{s}{t} CA; \text{ erit } \frac{n}{m} = \frac{t - s}{2t - s}. \text{ Nam hoc supposito erit (supponitur)} \\ \text{O} \quad \text{mul-}$$

multiplicando)  $2tn - sn = mt - ms$ . vel transponendo  $2nt - mt = ms - ns$ . unde  $m - n . 2n - m :: t . s :: CA . AD$ . ergo patet ex antecedente.

XIV. Stante duodecimæ hypothesi, *paraboliformis* AFB intra hyperbolam AEB tota cadet.

Fig. 141. Nam utcumque ducatur EFG ad BD parallela; & recta ER hyperbolam, recta FS paraboliformem tangant. Estque SG . AG :: (a)  $m . n :: TD . AD$  (b)  $\rightarrow RG . AG$ . unde  $RG \subset SG$ . (c) unde curva AEB extra curvam AFB tota cadet.

XV. Etiam, si reliquis perstantibus, ad basin GE, axin AG constitutam imagineris ejusdem ordinis *paraboliformem*; hæc ad partes ipsâ GE superiores intra hyperbolam tota cadet.

Fig. 141. Nam si in curva hyperbolica AE sumatur ubicunque punctum M, & ordinetur MP, ducaturque hyperbolam tangens MV; erit VP . AP  $\subset m . n$ . adeoque rursus e tertia liquet Propositum.

XVI. Quinetiam si hæc altera coordinata *paraboliformis*, ad basin EG constituta, ad DB protracta concipiatur, ejus ipsis EG, BD intercepta pars extra hyperbolam tota cadet.

Fig. 141. Nam quod extra hyperbolam infra EG cadit, exinde patet, quod ipsa cum ipsius tangente recta ES angulum efficit minorem eo, quem eadem recta ES efficit cum recta RE hyperbolam tangente. quod autem eadem alibi, velut ad N, hyperbolæ non occurrit, patet; quoniam hoc posito, (a) ipsa intra hyperbolam AN tota consisteret, contra quam mox ostensum est.

XVII. Habeant Circulus AEB, & Parabola AFB communem axem AD, & basin DB; parabola ad partes supra BD intra Circulum; at infra BD extra circulum cadet.

Fig. 142. Sit enim Circuli Diameter AZ, & ei æqualis AH ad BD parallela, & connectatur ZH; & huic BD producta ad I; ergo DI est Parameter parabola AFB. quod si supra BD utcumque ducatur recta EFGK ad BD parallela circulum secans in E, parabolam in F, rectas AZ, HZ, in G, & K, patet esse  $GEq = AG \times GK \subset AG \times DI = GFq$ . unde  $GE \subset GF$ . Item, si infra BD utcumque ducatur recta MNOL ad BD parallela parabolam secans in M, circulum in N, rectas AZ, HZ in O, & L, iridem patet esse  $MOq = AO \times DI \subset AO \times OL = NOq$ . & ideò MO  $\subset NO$ .



☐ N O. quare liquent ea, quæ Proposita sunt.

Si Circulo substituantur *Ellipsis*, eadem conclusio valet idem discursus probat; posita A H *Ellipsis parametro*.

XVIII Habeant *hyperbola* A E B (cujus axis A Z, parameter A H) & *parabola* A F B axin eundem A D, & basin D B, *parabola* supra D B tota extra *hyperbolam* cadet, extra verò, si infra D B protrahatur. Fig. 143.

Nam connexæ Z H occurrat B D in I; ergò D I est *parabola parametro*. Quòd si supra B D utcumque ducatur recta F E G K ad B D parallela, secans *hyperbolam* in E, *parabolam* in F, rectas A D, Z H punctis G, K, erit  $F G q = A G \times D I$  ☐  $A G \times G K = E G q$ . quare  $F G$  ☐  $E G$ . Quòd si infra B D, utcumque ducatur recta M N O L secans *hyperbolam* in N, *parabolam* in M, rectas A D, Z H in O, & L, erit  $N O q = A O \times O L$  ☐  $A O \times D I = M O q$ . & indè N O ☐ M O. unde constant ea quæ proposita sunt.

XIX. E dictis eliciuntur hæ ad *Circuli dimensionem pertinentes regulæ*. Sit B A E circuli portio, cujus axis A D, basis B E; sitque C centrum circuli, & E H sinus rectus arcus B A E; item, sit  $A D =$  Fig. 144.

$$\frac{s}{t} C A; \text{ erit } 1. \frac{2t-s}{3t-2s} A D \times B E \text{ ☐ port. B A E.}$$

$$2. E H - \frac{4t-2s}{3t-2s} B H \text{ ☐ arc. B A E.}$$

$$3. \frac{2}{3} A D \times B E \Rightarrow \text{port. B A E.}$$

$$4. E H - \frac{4}{3} B H \Rightarrow \text{arc. B A E.}$$

XX. Itidem hæ deducuntur ad *hyperbolæ dimensionem spectantes regulæ*. Sit *hyperbolæ* (cujus centrum C) segmentum A D B, habens Fig. 145.  
axin  $A D = \frac{s}{t} C A$ ; & basin D B;

$$\text{erit } 1. \frac{2t+s}{3t-t-2s} A D \times D B \Rightarrow \text{segm. A D B. \&}$$

$$2. \frac{2}{3} A D \times D B \text{ ☐ segm. A D B.}$$

XXI. Porrò, sit *circuli* (cujus centrum C) segmentum B A E, cujus axis A D, & *gravitatis centrum* K; ponatur autem  $A D = \frac{s}{t} C A$ , &  $H D = \frac{2t-s}{5t-3s} A D$ ; erit H D major ipsâ K D.

Fig. 146.

Nam per H ducatur recta O P ad B E parallela; éstque punctum (a) 2. hujus ap. H (a) centrum *gravitatis paraboliformis*, (puta A F B) ad basin B E constitutæ, cujus exponens  $\frac{t-s}{2t-s}$  & (b) quæ proinde circulum AEB

tangit; (nam si  $\frac{t-s}{2t-s} = \frac{n}{m}$ ; erit  $\frac{2t-s}{5t-3s} = \frac{m}{n+2m}$ ) & pro-

inde H (a) erit centrum *gravitatis paraboliformis* isti coordinatæ per O, P transeuntis, & ad basin B E pertingentis. Hæc autem supra O

(c) 10. hujus ap. P (c) extra circulum cadit, & infra O P (d) 11. hujus ap. intra ipsum; (e) adeoque punctum H supra K situm est.

(e) 4. hujus ap.

XXII. Sin punctum L sit *centrum gravitatis parabola*, erit L infra

K situm; adeoque  $K D \sqsubset \frac{2}{5} A D$ . Patet ex 4, & 17 hujus appendiculæ.

Fig. 147.

XXIII. Sit *Hyperbola* (cujus centrum C) segmentum B A E, cujus axis A D, basis B E; *gravitatis centrum* K; ponatur autem  $A D = \frac{s}{t} C A$ , &  $H D = \frac{2t+s}{5t+3s} A D$ ; erit H D minor ipsâ K D.

(a) 2. hujus ap. Nam per H ducatur recta O P ad B E parallela (a). Estque punctum H centrum gr. *paraboliformis*, puta A F B, ad basin D B constitutæ,

(b) 13. hujus ap. cujus exponens  $\frac{t+s}{2t+s}$ ; (b) quæ & *Hyperbolam* ad B contingit (nam

si  $\frac{t+s}{2t+s} = \frac{n}{m}$ ; erit  $\frac{2t+s}{5t+3s} = \frac{m}{n+2m}$ ) (a) quare H erit cen-

trum *gravitatis paraboliformis* isti coordinatæ per O, P ductæ, & ad B E pertingentis. hæc autem supra O P (c) intra hyperbolam cadit;

(c) 15. hujus ap. & infra O P (d) extra illam; (e) inde punctum K supra H existit.

(d) 16. hujus ap.

(e) 4. hujus ap.

XXIV. Parabolæ centrum gr. (puta L) supra K existit, adeoque  $K D \supset \frac{2}{5} A D$ . Patet ex 4, & 18 hujus appendiculæ.

XXV. Ne

XXV. Nè speculatio præfens, ob hujusmodi complures methodos Cyclometricas indies promulgatas, aspernanda videatur, adjungemus confectarium unum vel alterum, quibus fortè solis hæc paucula meruerant impendi; à quibus nempe *Maxima, Minimaque* sui generis innúmera determinantur.

Fig. 148.

Sit *Semicirculus* ABZ, cujus centrum C; sitque segmentum ADB; & huic adscripta *paraboliformis* AFB, cujus exponens  $\frac{n}{m}$ ;

sit item  $AD = \frac{m - 2n}{m - n} CA$ ; *paraboliformis* autem *parameter* (hoc est recta, cujus aliqua potestas in potestatem segmenti axis, seu AD, ducta conficit potestatem ordinatæ, ceu DB) nominetur  $p$ ; erit  $p$  in suo genere *maximum*.

Nam utcumque ducatur GE ad DB parallela, & ad CE posita concipiatur *paraboliformis*, ipsi AFB coordinata, cujus *parameter* dicatur  $q$ . quum ergo *paraboliformis* AFB *circulum* extorsum contingat, erit  $GF \sqsubset GE$ ; adeoque  $GF^m \sqsubset GE^n$ ; hoc est  $p^{m-n} \times AG^n \sqsubset q^{m-n} \times AG^n$ ; quare  $p \sqsubset q$ .

Notandum est esse  $p^{\frac{2m-2n}{m-2n}} = ZD^m \times AD^{\frac{m-2n}{m-2n}}$ . &  $q^{\frac{2m-2n}{m-2n}} = ZG^m \times AG^{\frac{m-2n}{m-2n}}$ . unde  $ZD^m \times AD^{\frac{m-2n}{m-2n}} \sqsubset ZG^m \times AG^{\frac{m-2n}{m-2n}}$ . quare  $ZD^m \times AD^{\frac{m-2n}{m-2n}}$  est maximum.

*Exemp. 1.* Sit  $n = 1$ , &  $m = 3$ . erit ideò  $p^{\frac{1}{2}} = ZD^{\frac{1}{2}} \times AD = ZDq \times BDq$ ; vel  $p^{\frac{1}{2}} = ZD \times BD$ . Item  $AD = \frac{1}{2} CA$ .

2. Sit  $n = 3$ , &  $m = 10$ . erit  $p^{\frac{1}{7}} = ZD^{\frac{1}{7}} \times AD^{\frac{1}{7}}$ . vel  $p^{\frac{1}{7}} = ZD^{\frac{1}{7}} \times AD^{\frac{1}{7}} = ZD^{\frac{1}{7}} \times BD^{\frac{1}{7}}$ . &  $AD = \frac{1}{7} CA$ .

XXVI. Sit item *hyperbola* (æquilatera) cujus centrum C, axis ZA; & huic inscripta *paraboliformis* AFB cujus exponens  $\frac{n}{m}$  *parameter*  $p$ ; sitque  $AD = \frac{2n-m}{m-n} CA$ ; erit  $p$  sui generis maximum.

Fig. 149.

Nam utcumque ducatur EG ad BD parallela; & ad EG constituta intelligatur *paraboliformis*, ipsi AFB coordinata, cujus *parameter*  $q$ . quum ergo *paraboliformis* AFB *hyperbolam* introrsum contingat, erit  $GF^m \sqsupset GE^n$ ; hoc est  $p^{m-n} \times AG^n \sqsupset q^{m-n} \times AG^n$ ; quare  $p \sqsupset q$ .

*Notandum*

Notandum est esse  $p^{\frac{2m-2n}{2n-m}} = \frac{ZD^m}{AD^{\frac{2n-m}{2n-m}}}$  &  $q^{\frac{2m-2n}{2n-m}} =$

Fig. 149.  $\frac{ZG^m}{AG^{\frac{2n-m}{2n-m}}}$  unde erit  $\frac{ZD^m}{AD^{\frac{2n-m}{2n-m}}} = \frac{ZG^m}{AG^{\frac{2n-m}{2n-m}}}$  quare  $\frac{ZD^m}{AD^{\frac{2n-m}{2n-m}}}$  est minimum.

Exemp. 1. Sit  $n = 2$ ; &  $m = 3$ ; erit  $p^2 = \frac{ZD^3}{AD} = \frac{BD^3}{AD}$  &  
 $p = \frac{BD^3}{ADq} = \frac{ZDq}{BD}$  Item  $AD = CA$ .

2. Sit  $n = 3$ ; &  $m = 4$ ; erit  $p^2 = \frac{ZD^4}{AD^2}$  vel  $p = \frac{ZD^2}{AD}$   
 $= \frac{BD^2}{AD} = \frac{ZD^2}{BD^2}$  Item  $AD = 2 CA$ .

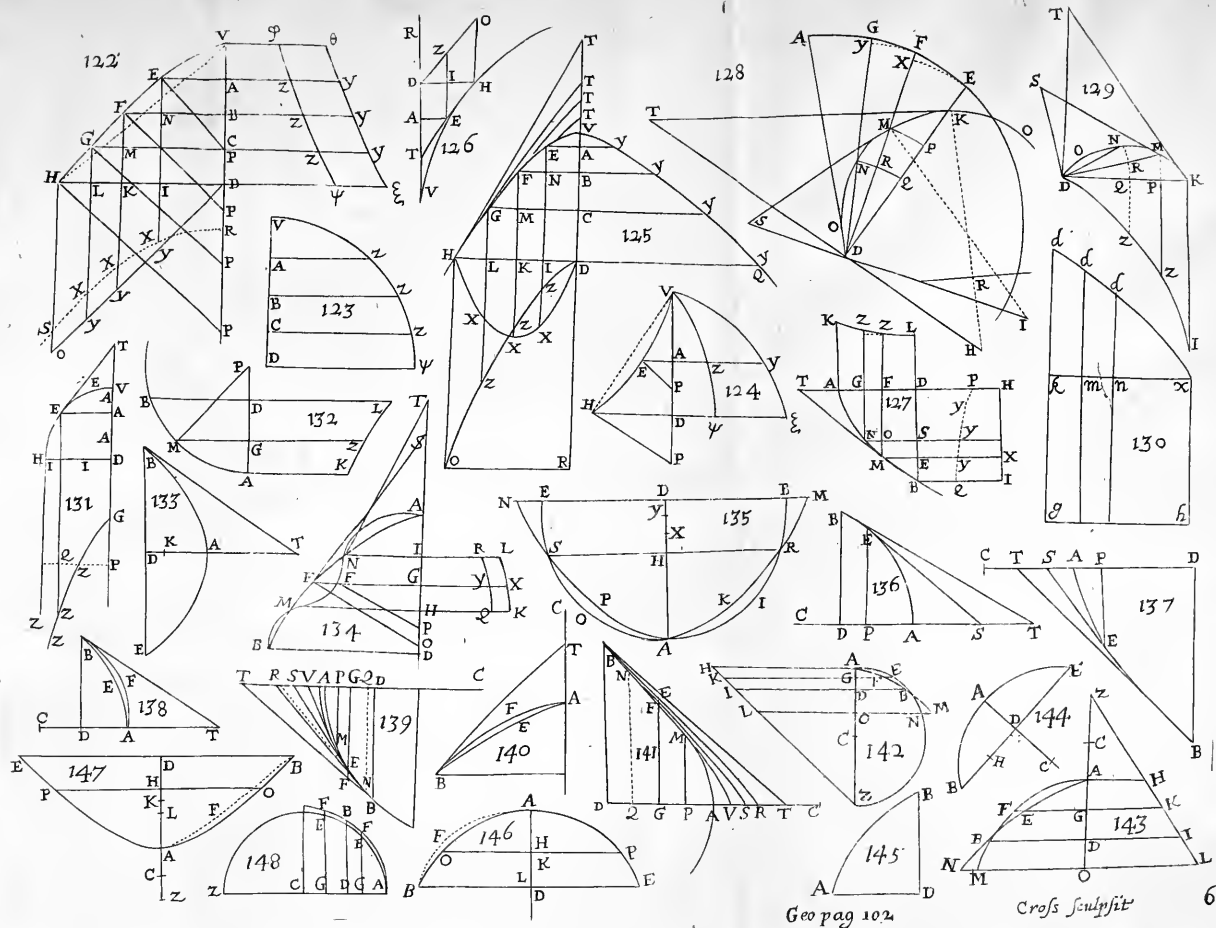
3. Sit  $n = 5$ , &  $m = 8$ ; erit  $p^6 = \frac{ZD^8}{AD^2}$  vel  $p^3 = \frac{ZD^4}{AD}$   
 $= \frac{BD^4}{AD} = \frac{ZD^4}{BD^2}$  Item  $AD = \frac{2}{3} CA$ .

Quoniam in his *Cyclometriam* attigi, quid si obiter eò spectantia *Theoremata*, quæ ad manum, paucula subjunxero? præsternatur autem hoc καὶ δολιχόν:

Sit curva quæpiam  $AGB$ , cujus axis  $AD$ , & ad hunc ordinatæ rectæ  $BD$ ,  $GE$ ; Habebit curva  $AB$  ad curvam  $AG$  majorem rationem quam recta  $BD$  ad rectam  $GE$ .

Nam ducatur recta  $GH$  ad  $AD$  parallela: secenturque recta  $BH$  punctis  $Y$ , & recta  $GE$  punctis  $Z$  in particulas indefinite multas; perque puncta  $Y$ ,  $Z$  ducantur rectæ  $YM$ ,  $YN$ ,  $ZO$ ,  $ZP$  ad  $AD$  parallelæ: curvam interfecantes punctis  $M$ ,  $N$ ,  $O$ ,  $P$ ; per quæ ducantur rectæ  $MR$ ,  $NS$ ,  $OT$ ,  $PV$  ad  $BD$  parallelæ. Estque angulus  $BMY$  (ut è superius ostensis liquet) minor angulo  $NGS$ , unde  $MB \cdot BY \sqsubset GN \cdot NS$ . Similique de causa est  $NM \cdot MR \sqsubset GN \cdot NS$ . \* quare conjunctè est  $BM \cdot MN \cdot NG \cdot BY \cdot MR \cdot NS \sqsubset GN \cdot NS$ ; hoc est arc.  $GB \cdot BH \sqsubset GN \cdot NS$ . rursus (è discursu consimili) ratio  $GN$  ad  $NS$  major est singulis rationibus  $OG$  ad  $GZ$ ,  $OP$  ad  $PT$ , &  $AP$  ad  $PV$ ; idcircoq; junctè est  $GN \cdot NS \sqsubset$  arc.  $AG \cdot GE$ . quapropter erit  $GB \cdot BH \sqsubset AG \cdot GE$ . permutandòque  $GB \cdot AG \sqsubset BH \cdot GE$ . quare componendo est  $AB \cdot AG \sqsubset BD \cdot GE$ .

\* Vid. Append.  
Lect. XII.





XXVIII. Sit *Circulus* AMB, cujus *Radius* CA, & ad hunc perpendicularis recta DBE; sit item curva ANE talis, ut ductâ utunque rectâ PMN ad DE parallelâ (quæ circulum secet in M, dictam curvam in N) sit recta PN æqualis *Archi* AM; sit demum *axe* AD, *bâse* DE descripta *Parabola* AOE, hæc extra curvam ANE tota cadet.

Fig. 151.

Nam secet recta PN parabolam in O; & connectantur subtensæ AB, AM; estque DE.PN :: arc. AB. arc. AM  $\square$  AB. AM :: DE.PO. quare PN  $\Rightarrow$  PO; unde liquet Propositum.

XXIX. Exhinc (& è vulgò notis *spatiorum* ADB, ADE *dimensionibus*) facillè colligitur hæc regula:  $\frac{3 CA \times DB}{2 CA + CD} \Rightarrow$  arc. AB.

Fig. 152.

Porrò si ponatur arc. AB = 30 grad. sitque 2 CA = 113; juxta regulam istam computando, proveniet *totâ circumferentiâ* major quam 355, minus fractione unitatis.

XXX. Hinc etiam dato arcu AB, nominatîsque AB = p; CA = r; & DB = e, ad inveniendum *sinum rectum* DB adhibebitur hæc æquatio;  $\frac{3 r r p p}{9 r r + p p} = \frac{12 r r p}{9 r r + p p} e - e e$ . vel ponendo  $k = \frac{3 r r p}{9 r r + p p}$ , erit  $k p = 4 k e - e e$ . vel  $2 k = \sqrt{4 k k - k p} = e$ .

XXXI. Sit AMB *Circulus*, cujus *Radius* CA, & huic perpendicularis recta DBE; sit item curva ANE pars *Cycloidis* ad *Circulum* AMB pertinentis; demum ad axem AD, basin DE statuatur *Parabola* AOE; hæc intra *Cycloidem* tota cadet.

Fig. 153.

Etenim utcumque ducatur recta PMON ad DE parallela, lineas expositas secans, ut cernis; connectanturque *subtensæ* AB, AM; estque DE.PO :: AB. AM :: curv. AE. AN  $\square$  DE. PN; adeoque PO  $\Rightarrow$  PN. unde constat Propositum.

XXXII. Exhinc, & è notis *segmentorum circularis atque Cycloidalis dimensionibus*, hæc elicitor *Regula*  $\frac{2 CA \times DB + CD \times DB}{CA + 2 CD} \square$  arc. AB.

Porrò si fuerit arc. AB = 30 grad. & ponatur 2 CA = 113; è regula hac confectatur fore *totam circumferentiâ* minorem quam 355, plus fractione.

Vides igitur ut è propositis duâbus regulis statim emergit *Diametri ad Circumferentiâ Proportio Metiana*.

XXXIII. Quoniam exorbitanti se obviam dedit *Cyclois* hoc adnotabo *heorema*, nescio an uspiam ab illis, qui de *Cycloide* tam fusè scripserunt, animadversum: Completo *Rectangulo* ADEG, *spatium* AEG

AEG æquatur Circulari segmento ADB demonstrationem, ne longius evager, obmittam.

Fig. 154.

XXXIV. Sint duo circuli AIMG, AKNH sese contingentes ad A; communique diametro A H G, utcunque perpendicularis ducatur recta DN M: habebit segmentum AIMD ad segmentum AKND minorem rationem, quam recta DM ad rectam DN.

Nam sit AR ad AG perpendicularis, ac ipsi AH æqualis; & connectatur HR, cui occurrat recta MD in X; ducaturque recta GX S; tum ad axem AG parametrum AS per N descripta concipiatur Ellipsis ALNG; hæc (utî satis manifestum) intra arcum AKN tota cader. Est autem segm. AIMD. segm. ALND :: DM. DN. ergo segm. AIMD. segm. AKND  $\rightarrow$  DM. DN.

Fig. 154.

XXXV. Sit Ellipsis YFZT, cujus axes conjugati YZ, FT; sit item recta DC axi majori YZ parallela; & per D, F, C transeat circulus DFCV centrum habens K, in ellipsis axe minore FT situm; dico circuli partem DOFC intra ellipsis partem DMENC jacere.

Nam sit FI ad FV perpendicularis, & in hac sumatur FS = FV; & connectatur VS, cui DC producta occurrat in X; & connexa TX ipsi FI occurrat in R. & cum sit GD q = FG  $\times$  GV = FG  $\times$  GX; liquet ipsam FR esse ellipsis, axi FT congruam, parametrum, unde constat Propositum.

Fig. 155.

XXXVI. Sit circuli, cujus centrum L, segmentum DEC, & sumpto in ejus axe GE puncto quopiam F, sit curva DMFC talis, ut ductâ utcunque rectâ RMS ad GE parallêlâ, sit RS.RM :: GE.GF; erit DMFC ellipsis, hoc modo determinata: Fiat EG.FG :: GL.GH; & per H erigatur YHZ ad DC parallela, sitque HY par ipsi LE; erunt HY, HF ellipsis semiaxes.

Demonstratum habetur a Greg. à S. Vincentio, L. IV. Prop. 154. Corol. Hinc segm. DEC. DMFC :: EG. FG.

XXXVII. Sint duæ circulorum portiones DEC, DOFC quarum communis subtensa DC, & axis GFE; portio major DEC ad portionem DOFC majorem rationem habet eâ, quam habet axis GE ad axem GF.

Nam sint L circuli DSEC, & K circuli DOFC centra; & fiat EG. FG :: GL. GH; & fiat YHZ ad H perpendicularis, & sit HY æqualis ipsi LE; tum semiaxibus HY, HF descripta concipiatur ellipsis YDMFCZ; e mox prædictis liquet ellipsin DMFC circulo DOFC circumduci. Est autem circulare segmentum DEC ad segmentum ellipticum MFC, ut GE ad GF; quare segm DEC ad segm circulare DOFC. rationem habet majorem, quàm GE ad GF: Quod. E. D.

LECT.



## LECT. XII.

IN suscepto negotio progredimur; quod ut (quatenus licet) decuramus, verbisque parcamus; observetur, in sequentibus ubique *lineam*  $AB$  curvam esse (quales tractamus) quampiam; cujus *Axis*  $AD$ ; huic applicatas omnes rectas  $BD, CA, MF, NG$  perpendiculares; &  $ME, NS, CB$  parallelas esse; punctum  $M$  liberè sumi; arcum  $MN$  indefinitè parvum esse; rectam  $\alpha\epsilon$  curvæ  $VB$ ,  $\alpha\mu$  curvæ  $AM$ ,  $\mu\gamma$  arcui  $MN$  æquales esse; ad rectam  $\alpha\epsilon$  applicatas ei perpendiculares esse. His præstratis, Preparatio  
Communis.

I. Sit  $MP$  curvæ  $AB$  perpendicularis; & lineæ  $KZL$ ,  $\alpha\phi\delta$  tales, ut  $FZ$  ipsi  $MP$ , &  $\mu\phi$  ipsi  $MF$  æquantur; erit spatium  $\alpha\epsilon\delta$  ipsi  $ADLK$  æquale. Fig. 156,  
157.

Nam *Triangula*  $MNR, PFM$  similia sunt, adeoque  $MN \cdot NR :: PM \cdot MF$ . unde  $MN \times MF = NR \times PM$ , hoc est (substitutis æqualibus)  $\mu\gamma \times \mu\phi = FG \times FZ$ ; seu rectang.  $\mu\theta = \text{rectang. } FH$ ; spatium verò  $\alpha\epsilon\delta$  minimè differt ab indefinitè multis rectangulis, qualia  $\mu\theta$ ; & spatium  $ADLK$  totidem rectangulis, qualia  $FH$ , æquivalet. unde liquet Propositum.

II. Hinc, si curva  $AMB$  circa axem  $AD$  rotetur, habebit se *producta superficies* ad spatium  $ADLK$ , ut *Circumferentia circuli ad radium*; unde noto spatio  $ADLK$  cognoscetur dicta *superficies*. Consequentiae rationem jam antea pridem assignavimus. Fig. 156.

III. Exhinc *Sphæra, Spheroidis* utriusque, *Conoidumque superficies dimensionem* accipiunt; nam si  $AD$  sit conicæ sectionis, à qua istæ figuræ oriuntur, axis; linea  $KZL$  semper aliqua conicarum existet, haud difficili negotio determinabilis. Hoc suggero tantum, quoniam nunc evulgatum habetur.

Fig. 156,  
157.

IV. Iisdem stantibus, sit curva A Y I talis, ut ordinata F Y sit inter congruas F M, F Z proportionem media; erit *solidum* ex spatio  $\alpha \delta \epsilon$  circa axem  $\alpha \epsilon$  rotato factum æquale *solido*, quod à spatio A D I circa axem A D converso procreatur.

Nam est  $M N . N R :: P M . M F :: P M \times M F . M F q :: F Z \times F M . M F q$ . unde  $M N \times M F q = N R \times F Z \times F M$ ; hoc est  $\mu \nu \times \mu \phi q = N R \times F Y q$ . Unde liquet Propositum.

Fig. 156,  
157.

V. Simili ratione colligetur, si F Y ponatur inter F M, F Z *bimmedia*, fore *summam cuborum* ex applicatis (quales  $\mu \phi$ ) à curva  $\alpha \phi \delta$  ad rectam  $\alpha \epsilon$ , æqualem *summa cuborum* ex explicatis à curva A Y I ad rectam A D. parique modo se res habebit quoad cæteras *potestates*.

Fig. 156.

VI. Porro, stantibus reliquis, sit curva V X O talis, ut E X ipsi M P æquetur; & curva  $\omega \xi \psi$  talis, ut  $\mu \xi$  æquetur ipsi P F; erit spatium  $\alpha \omega \psi \epsilon$  æquale spatio D V O B.

Nam est  $M N . M R :: M P . P F$ ; adeoque  $M N \times P F = M R \times M P$ . hoc est  $\mu \nu \times \mu \xi = E S \times E X$ . vel rectang. E T = rectang.  $\mu \sigma$ . Unde liquet Propositum.

Fig. 156.

VII. Subnotetur hoc: Si curva A B sit *Parabola*, cujus *Axis* A D, *parameter* R; erit curva V X O *hyperbola*, cujus *centrum* D, *Axis* D V, cujusque *parameter* axi R æquatur (scilicet ob  $E X q = (P M q = P F q - F M q = \frac{R q}{4} + F M q = \frac{R q}{4} + D E q =) D V q - D E q$ ). item spatium  $\alpha \epsilon \psi \pi$  erit *Rectangulum*; quoniam singulæ applicatæ  $\mu \xi$  ipsi  $\frac{R}{2}$  æquantur. Constat itaque dato spatio *hyperbolico* D V O B curvam A M B dari; & vicissim. Hoc obiter.

Fig. 157.

VIII. Adnotari posset etiam omnia simul quadrata ex applicatis ad rectam  $\alpha \epsilon$  à curva  $\omega \xi \psi$  æquari rectangulis omnibus ex P F, E X ad rectam D B applicatis (seu computatis); cubos ex  $\mu \xi$  æquari ipsis P F q  $\times$  E X; ac ita porro.

Fig. 157.

IX. Adjungatur etiam (productâ P M Q) si ponatur F Z æqualis ipsi P Q, &  $\mu \phi$  ipsi A Q; spatium  $\alpha \epsilon \delta$  spatio A D L K æuari.

Nam

Nam ob  $MN \cdot NR :: PM \cdot MF :: PQ \cdot QA$ ; erit  $MN \times QA = NR \times QA$ ; hoc est rectang.  $\mu\theta = \text{rectang. } FH$ .

X. Porro, curvam  $AB$  tangat recta  $MT$ , sintque curvæ  $DXO$ ,  $\alpha\phi\delta$  tales, ut  $EX$  æquetur ipsi  $MT$ , &  $\mu\phi$  ipsi  $MF$ ; erit spatium  $\alpha\epsilon\delta$  æquale spatio  $DXOB$ .

Nam  $MN \cdot MR :: MT \cdot MF$ . quare  $MN \times MF = MR \times MT$ ; hoc est  $\mu\nu \times \mu\phi = ES \times EX$ ; unde patet.

Fig. 158.  
159.

XL. Hinc rursus, superficies solidi ex spatio  $ABD$  circa axem  $AD$  conversione progeniti ad spatium  $DXOB$  se habet, ut *Circuli Circumsf. ad radium*; hoc igitur noto simul illa innotescet. unde rursus *Sphaeroidum, Conoidumque superficies* dimetiri licebit.

Fig. 158.

XII. Si linea  $DYI$  talis fuerit, ut sit  $EY = \sqrt{EX \times MF}$ ; erit solidum ex spatio  $\alpha\epsilon\delta$  circa axem  $\alpha\epsilon$  rotato factum æquale solido, quod ex spatio  $DBI$  circa axem  $DB$  rotato progignitur.

Etenim est  $MN \cdot MR :: MT \times MF$ .  $MFq :: EX \times MF$ .  $MFq :: EYq$ .  $MFq$ . quare  $MN \times MFq = MR \times EYq$ . hoc est  $\mu\nu \times \mu\phi q = ES \times EYq$ .

Fig. 158.  
159.

XIII. Simili ratione *Cuborum (aliarumque potestatum)* ex ordinatis  $\mu\phi$  summas cum spatiis ad rectam  $DB$  computatis licebit conferre.

XIV. Sint præterea lineæ  $AZK$ ,  $\alpha\xi\downarrow$  tales, ut  $FZ$  ipsi  $MT$ , &  $\mu\xi$  ipsi  $TF$  æquantur; spatium  $\alpha\epsilon\downarrow$  æquabitur spatio  $ADK$ .

Etenim  $MN \cdot NR :: MT \cdot TF$ ; hoc est  $\mu\nu \cdot FG :: FZ \cdot \mu\xi$ . quare  $\mu\nu \times \mu\xi = FG \times FZ$ .

Fig. 158.  
159.

XV. Etiam *summa quadratorum* ex applicatis  $\mu\xi$  æquatur *summa Rectangulorum* ex  $TF, FZ$ ; & *summa Cuborum* ex  $\mu\xi$  æquantur ipsis  $TFq \times FZ$  (ad rectam scilicet  $AD$  computationem exigendo) parique quoad cæteras potestates modò.

Fig. 158,  
159.

XVI. Rursus ponatur recta  $QMP$  curvæ  $AMB$  perpendicularis; sitque recta  $\epsilon\delta$  æqualis ipsi  $BD$ , & compleatur *Rectangulum*  $\alpha\epsilon\delta\zeta$ ; tum curva  $KZL$  talis sit, ut  $FZ$  ipsi  $QP$  æquetur; erit *rectang.  $\alpha\epsilon\delta\zeta$*  æquale spatio  $ADLK$ .

Fig. 160,  
161.

Nam est  $MN \cdot NR :: (PM \cdot MF ::) PQ \cdot IF$ . quare  $MN \times IF = NR \times PQ$ ; hoc est  $\mu\nu \times \mu\xi = FG \times FZ$ . unde patet.

Hinc noto spatio  $A K L D$  cognoscetur curvæ  $A M B$  quantitas.

Fig. 160,  
161.

XVII. Item, posito rectam  $T M Y$  contingere curvam  $A M B$ , factâque  $\epsilon \gamma = B C$ , completâque *Rectangulo*  $\alpha \epsilon \gamma \downarrow$ , sit curva  $O X X$  talis, ut  $F X$  ipsi  $T Y$  æquetur; erit *spatium* (infinite protensum)  $A D O X X$  æquale *Rectangulo*  $\alpha \epsilon \gamma \downarrow$ .

Nam  $M N . N R :: Y T . D A$ ; hoc est  $\mu \nu . F G :: F X . \mu \theta .$  &  $\mu \nu \times \mu \theta = F G \times F X$ . quare liquet.

Hinc rursus, explorato *spatio*  $A D O X X$  curva  $A M B$  innotescet,

Fig. 160,  
161.

XVIII. Quin adsumptâ quâpiam determinatâ  $R$ , & factâ rectâ  $\epsilon \delta = R$ ; si curva  $O X X$  talis sit, ut  $M F . M P :: R . F X$ ; erit *rectangulum*  $\alpha \epsilon \eta \zeta$  æquale *spatio*  $A D O X X$ . ac inde comperto hoc spatio, curva prorsus innotescet.

Nam  $M N . N R :: M P . M F :: F X . R$ . adeoque  $M R \times R = N R \times F X$ ; ceu  $\mu \nu \times \mu \xi = F G \times F X$ .

Complura talia possent adponi; sed vereor ut hæc nimis quam sufficere videantur.

XIX. Adnotetur saltem, hæc omnia æquè vera fore, nec absimiliter ostendi, posito curvæ  $A M B$  convexa rectam  $A D$  spectare.

XX. Ex ostensis autem *methodus* facilis emergit *curvas* ( $\delta\epsilon\omega\gamma\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{\alpha}\iota$ ) *designandi*, quæ *dimensionem* admittunt qualem qualem; nimirum ita procedas.

Fig. 162.

Quamlibet (tibi quadantenus notam) *aream trapeziam rectangulam*, duabus parallelis rectis  $A K, D L$ ; rectâ  $A D$ ; & lineâ quâcunque  $K L$  *comprehensam* accipe sis. ad istam verò sic referatur altera  $A D E C$ , ut ductâ quâcunque rectâ  $F H$  ad  $D L$  parallelâ (quæ fecer lineas  $A D, C E, K L$  punctis  $F, G, H$ ) adsumptâque rectâ determinatâ  $Z$ ; sit *quadratum* ex  $F H$  æquale *quadratis* ex  $F G, & Z$ . quinetiam sit curva  $A I B$  talis, ut ad ipsam productâ rectâ  $G F I$ , sit *rectangulum* ex  $Z$ , &  $F I$  æquale *spatio*  $A F G C$ ; erit *rectangulum* ex  $Z$ , & *curva*  $A B$  æquale *spatio*  $A D L K$ .

Æquè procedit *methodus*, etiamsi recta  $A K$  ponatur infinita.

Fig. 162.

Exemp. 1. Sit  $K L$  *recta linea*; erit curva  $C G E$  *Hyperbola*.

Fig. 163.

2. Sit linea  $K L$  *Arcus Circuli*, cujus *Centrum*  $D$ ; &  $A K = Z$

$$= Z; \text{ erit curva } AGF \text{ Circulus; \& curva } A B = \frac{AD}{2} + \frac{DL}{2 AK} \text{ arc. } KL.$$

3. Sit linea KL *Hyperbola æquilatera*, cujus *Centrum* A, & Fig. 164.  
*Axis* AK = Z; erit CGE recta linea; & curva AB  
*Parabola*.
4. Sit Linea KL *Parabola* (cujus axis AD) erit curva CGE Fig. 163.  
 quoque *Parabola*; & curva AB *Paraboliformium* quæ-  
 dam.
5. Sit curva KL *Paraboliformis* quædam inversa, vel infini- Fig. 165.  
 ta (talís scilicet ut sit  $FH = \sqrt{\frac{Z^3}{AF}}$ ) erit curva AB *Cyclo-*  
*is*, ad *circulum* pertinens, cujus *Diameter* ipsi Z æqua-  
 tur.

Elegantiora forsan *Exempla* ipse circumspiciens excogitabis.

## APPENDICULA I.

**H**ic demùm etsi præter institutum sit particularia nunc attingere ; qualibus sanè , hæc generalia consequentibus , admodum proclive foret turgidum Volumen compingere (*amico tamen morem gerens operâ dignum censenti*) subtexam ad *Circuli Tangentes Secantesq;* spectantiâ nonnulla, pleraque de suprà positis emergentia.

### Præparatio Communis.

Fig. 166.

Est *circuli Quadrans*  $ACB$ , quam tangant rectæ  $AH, BG$ ; & in productis  $HA, AC$  sumantur  $AK, CE$  singulæ pares radio  $CA$ ; & asymptotis  $AC, CZ$  per  $K$  descripta sit *Hyperbola*  $KZZ$ ; asymptotis  $BC, BG$  per  $E$  *hyperbola*  $LEO$ . Sumatur etiam in arcu  $AB$  punctum *arbitrarium*  $M$ , per quod ducantur rectæ  $CM S$  (tangenti  $AH$  occurrens in  $S$ ) rectæ  $MT$  circulum tangens; rectæ  $MFZ$  ad  $BC$  parallela, rectæ  $MPL$  ad  $AC$  parallela. Sit denuò rectæ  $αCα$  qualis *arctui*  $AB$ , &  $αμ$  *arctui*  $AM$ ; & rectæ  $αγ, ξμϖψ$  rectæ  $αC$  perpendiculares; quarum  $αγ = AC$ ;  $μξ = AS$ ;  $μψ = CS$ ;  $μϖ = MP$ .

Fig. 167.

I. Rectæ  $CS$  æquatur rectæ  $FZ$ ; adeoque *summa secantium ad arcum*  $AM$  pertinentium, & ad rectam  $AC$  applicatarum æquatur *spatio hyperbolico*  $AFZK$ .

Est enim  $CF . CA :: (CM . CS ::) CA . CS$ . adeòque  $CF \times CS = CAq$ . item  $CF \times FZ = CA \times AK = CAq$ . ergo  $CS = FZ$ .

Fig. 167<sup>a</sup>

II. *Spatium*  $αμξ$  (hoc est *Summa tangentium in arcu*  $AM$  ad rectam  $αμ$  applicatarum) æquatur *spatio hyperbolico*  $AFZK$ .

Patet ex hujusce Læctionis 9.

III.

III Curva A X X talis sit, ut P X secanti C S (vel C T) æquetur; spatium A C P X hoc est *Summa secantium ad arcum A M pertinentium*, & ad C B applicatarum) æquatur duplo sectori A C M.

Nam (a) spatium A F M X Segmenti A F M duplum est; & recta Fig. 166.  
angulum F C P M Trianguli F C M. ergo totum spatium A C P X (a) 10. Lect.  
totius sectoris A C M duplum est. XI.

Eriam hoc è 16. hujus duodecimæ Lectionis apertè constat.

IV. Curva C V V talis sit, ut P V Tangenti A S æquetur; erit spatium C V P (hoc est *summa tangentium ad arcum A M pertinentium*, & ad rectam C B applicatarum) æquale semissi quadrati ex subrensa A M.

Fig. 166.

Manifestè confectatur ex septima undecimæ Lectionis.

V. Acceptâ C Q = C P; & ductâ Q O ad C E parallelâ (quæ hyperbolæ L E occurrat in O) erit spatium hyperbolicum P L O Q ductum in radium C B (seu cylindricum ad basin P L O Q, altitudine B C (duplum *summae quadratorum* ex rectis C S, seu P X ad arcum A M pertinentibus, & ad rectam C B applicatis.

Fig. 166.

Nam quia P L. Q O :: (B Q. B P. hoc est ::) B C + C P. B C - C P; erit componendo P L + Q O. Q O :: 2 B C. B C - C P. item est Q O. B C :: B C. B C + C P; ergo (pares rationes adjungendo) est P L + Q O. Q O + Q D. B C = 2 B C. B C - C P + B C. B C + C P; hoc est P L + Q O. B C :: 2 B C q. B C q - C P q (hoc est ::) 2 B C q. P M q. verum est P X q. B C q :: B C q. P M q. vel (antecedentes duplando) 2 P X q. B C q :: 2 B C q. P M q. ergo P L + Q O. B C :: 2 P X q. B C q. vel P L x B C + Q O x B C. B C q :: 2 P X q. B C q. quare P L x B C + Q O x B C = 2 P X q. itaque B C in omnes P L + Q O ducta adæquat omnia totidem P X q. unde constat Propositum.

VI. Hinc spatium  $\alpha \gamma \downarrow \mu$  (hoc est *summa secantium in arcu A M ad a b applicatarum*) æquatur subduplo spatio hyperbolico P L O Q.

Fig. 167.

Nam sumatur arcus M N indefinitè parvus, & huic æqualis recta  $\mu \nu$ , ducaturque recta N R ad A C parallela. Estque M N. M R :: (M C. C F :: C S. C A :: P X. C A ::) P X q. P X x C A. adeoque M N x P X x C A = M R x P X q. seu  $\mu \nu \times \mu \downarrow \times C A = M R \times P X q.$  atqui (ex præcedente) omnium M R x P X q summa spatii P L O Q in C A ducti subdupla est. Ergo omnia totidem  $\mu \nu \times \mu \downarrow$  in C A ducta eidem subduplo æquantur. quare spatium  $\alpha \gamma \downarrow \mu$  (omnibus.

nibus  $\mu \nu \times \mu \downarrow$  par ) æquatur subduplo spatii P L O Q.

Fig. 167.

VII. Omnia quadrata ex rectis  $\mu \downarrow$  (ad rectam  $\alpha \mu$  applicais) æquant  $CA \times CP \times PX$  (hoc est *parallelipedum Base Rectangulo ACPD, Altitudine CS*).

Hujus Effati demonstrationem (quanquam  $\pi\epsilon\chi\chi\epsilon\sigma\nu$ ) transilio; quoniam aliud *Schema* discursumque præ reliquis plerisque longiusculum exposcit; neque rem tanti video.

Fig. 166.

VIII. Curva AYY talis sit, ut FY æquetur ipsi AS; ductâ tum rectâ YI ad AC parallela, erit etiam spatium ACIYYA (hoc est *summa Tangentium ad arcum AM* pertinentium, & ad rectam AC applicatarum, unâ cum *rectangulo FCIY*) æquale subduplo spatio hyperbolico P L O Q.

(a) 1. Lect.

XII.

(b) 14. Lect.

XII.

Nam spatium  $\alpha \gamma \varpi \mu$  (a) æquatur *rectangulo ACPD*; hoc est *rectangulo FCIY* (nam est  $CA.AS :: CF.FM$ , vel  $CA.FY :: CF.CP$ . adeoq;  $CA \times CP = FY \times CF$ ). item spatium  $\gamma \varpi \downarrow$  (hoc est omnes rectæ TF ad  $\alpha C$  applicatæ, quotquot ad arcum AM pertinent) (b) æquatur spatio A E Y; ergo spatium ACIYYA æquatur spatio  $\alpha \gamma \downarrow \mu$ ; hoc est (ut mox ostensum) *semissi spatii hyperbolici P L O Q.*

Aliter illud, (eique connexa) dimensus sum, *hoc præmissio Lemmate.*

Fig. 168.

IX. Sit *Hyperbola aquilatera* (axes nempe pares habens) ERK ad cuius axes CED, CI; & ad hos ordinatæ KI, KD; sit item curvâ EVY talis, ut in *hyperbola* liberè sumpto puncto R, ductâque rectâ RVS ad DC parallelâ, sint SR, CE, SV continuè proportionales; connexâ rectâ CK, erit *Spatium CEYI Sectoris hyperbolici KCE* duplum.

Nam ducatur RT *hyperbolam* tangens, & RH ad CI parallela. Estque CH.CE :: CE.CT. quare CT = SV; vel HT = RV. itaque *Spatium EDKY* duplum est *segmenti EDK*. item *rectangulum IKDC* trianguli CDK duplum est; ergo reliquum *spatium CEYI* reliqui *sectoris ECK* duplum est.

10. Lect. XI.

Fig. 169.

X. Resumptâ jam quadrante circulari ACB, sit CE = CA; & axe AE, *parametro* etiam AE, descripta sit *Hyperbola* EKK; positôque curvam AYY talem esse, ut ordinatâ quâcunque rectâ MFY, sit FY tangenti AS æqualis; ducatur rectâ YIK (rectam CZ,



C 2 secans in I, *hyperbolam* in K) & connectatur CK; erit spatium ACIYA sectoris hyperbolici ECK duplum.

Nam est CIq.CAq::ASq.CAq::FMq.CFq::CAq—CFq. CFq. componendoque CIq+CAq.CAq:: Fig. 169.  
CAq.CFq. hoc est (ex *hyperbolæ* natura) IKq.CAq::CAq.CFq. vel IK.CE::CE.IY. itaque spatium ACIYA sectoris ECK duplum esse perspicuum est è præcedente.

XI. Coroll. Hinc si Polo E, Chordâ CB, Sagittâ CA descripta sit Conchoid AVV, cui occurrat YFM producta in V; erit MV = FY; adeoque spatium AMV spatio AFY æquatur.

XII. Unde spatiorum ejusmodi Conchoidalium dimensiones innotescunt.

XIII. Nescio, an opera sit hoc adjicere Corollarium.

XIII. Sit recta AE rectæ RS perpendicularis; & CE = CA; sintque duæ (sibimet inversæ) Conchoides AZZ, EYY ad eundem polum E, communemque regulam RS descriptæ, ab E verò ducatur utcunque recta EYZ (lineas intersecans, ut vides) sit etiam hyperbole Fig. 170.  
aquilatera, EKK, cujus centrum C, semiaxis CE; duæque IK ad AE parallelæ, connectatur CK, erit spatium quadrilinum AE OYZPA (rectis AE, YZ, & conchis EOY, APZ comprehensum) æquale quadruplo sectori Hyperbolico ECK.

Nam si centro E per C ducatur arcus circularis CX; è dictis facile colligetur spatium APZIC æquari duplo sectori Hyperbolico ECK unâ cum sectore circulari CEX. item spatium EOYIC æquari duplo sectori ECK, dempto sectore CEX.

Ita quoque facile colligas. Ducantur ZF, YG ad CS parallelæ; & protrahantur GYL, LIH. ac ob IY = IZ, est FZ + GY = 2 CI. & trapezium FGYZ = rectang. EGLH = 2 CG × CI. ergò pater.

Adnotari potest, si lubet, ductâ AT ad CS parallelâ, protractâque EZT, si ponatur N = 2 triang. CEI — 2 sect. ECK; fore spat. EZT — EOYE = 2 N.

Nempe N + CXI = spat. AZT. & N — CXI = spat. EOYE.

XIV. Adjiciemus etiam hisce cognatam Cissoïdalis spatii dimensionem.

Sit Semicirculus AMB (cujus centrum C) quem tangat recta Fig. 171.  
AH; eique congruens Cissoïd AZZ cujus scilicet hæc proprietas est,  
Q  
ut

Fig. 171.

ut in *circumf.* A M B sumpto utcunque puncto M, & per hoc trajectâ rectâ B M Z, ductâque rectâ M F Z, quæ curvam A Z Z fecet in Z, sit  $MZ = AS$  in recta verò  $\alpha\mu$  sumatur  $\alpha\mu$  æqualis arcui A M, & ad  $\alpha\mu$  applicentur rectæ perpendiculares  $\mu\xi$  æquales *arcuum* A M *sinnibus versis* A F; erit *spatium trilineum* M A Z *spatii*  $\alpha\mu\xi$  *duplum*.

Nam sumatur *arcus* M N indefinitely parvus, & ei æqualis  $\mu\nu$ ; ducaturque recta N R ad A B parallela, connectaturque recta C M. Estque jam A S. A B (2 C M) :: (F M . F B ::) A F . F M. & 2 C M. 2 M N :: C M . M N ::) F M . N R. quapropter erit ex æquo A S. 2 M N :: A F . N R; & ideo  $NR \times AS = 2 MN \times AF$ . hoc est  $NR \times MZ = 2 \mu\nu \times \mu\xi$ . unde *spatium* M A Z *duplo spatio*  $\alpha\mu\xi$  æquatur.

Fig. 172.

Hinc cum *spatii*  $\alpha\mu\xi$  *dimensio* vulgò nota sit, & è suprâ positis etiam facillè deducatur; habetur *spatii cissoïdalis* M A Z *dimensio*. calculum ineat qui volet.

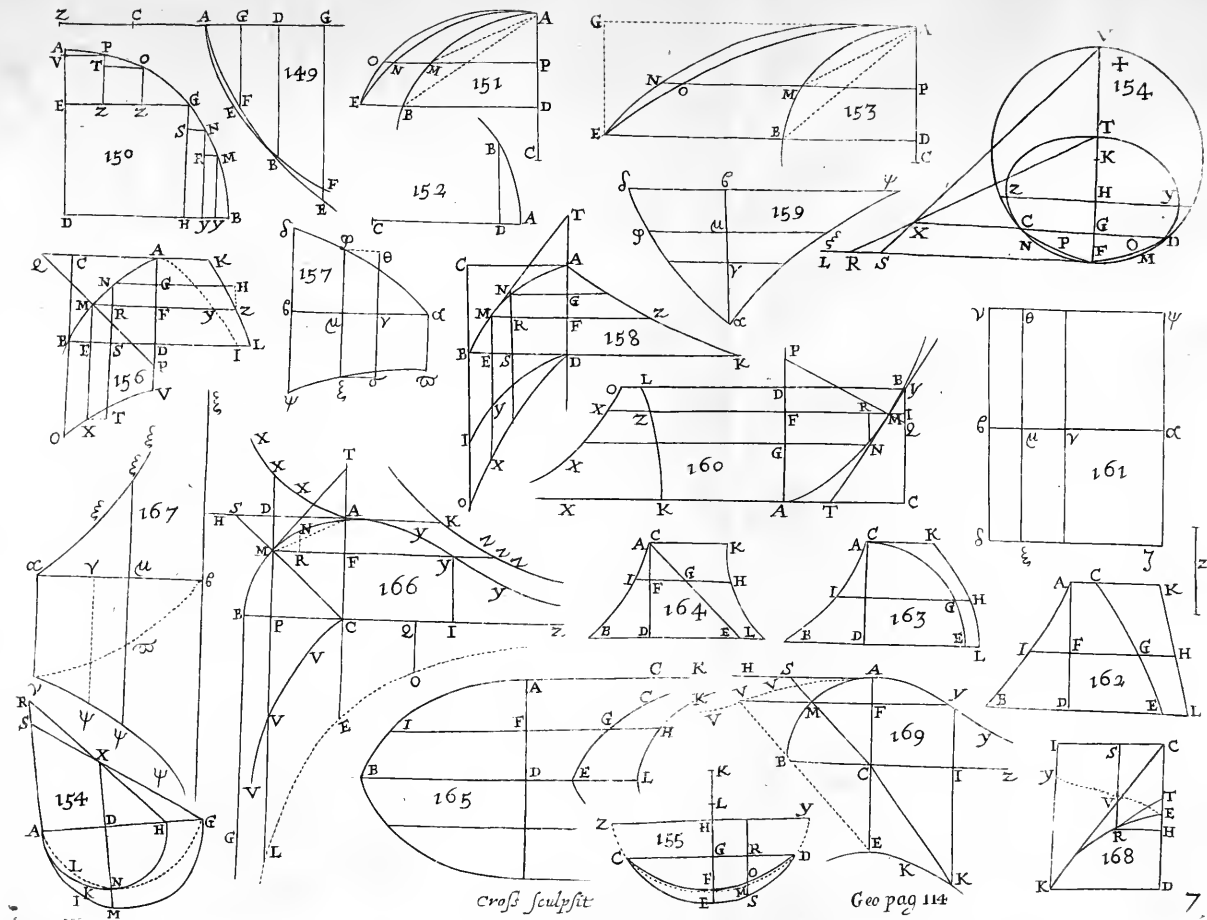
Ista claudet hoc *Consectariolum*:

Fig. 173.  
(a) 7, & 12.

XV. Sit *circuli quadrans* A C B, *circulûmque* tangant A H, B G; sintque curvæ K Z Z, L E O *hyperbolæ*, eadem quæ (a) superius. arcus verò sumptus A M in partes divisus concipiatur indefinitely multas punctis N; per quæ trajiciantur radii C N; & his occurrant rectæ N X ad puncta X; *summa rectarum* N X (in radiis) æquatur spatio A F Z K

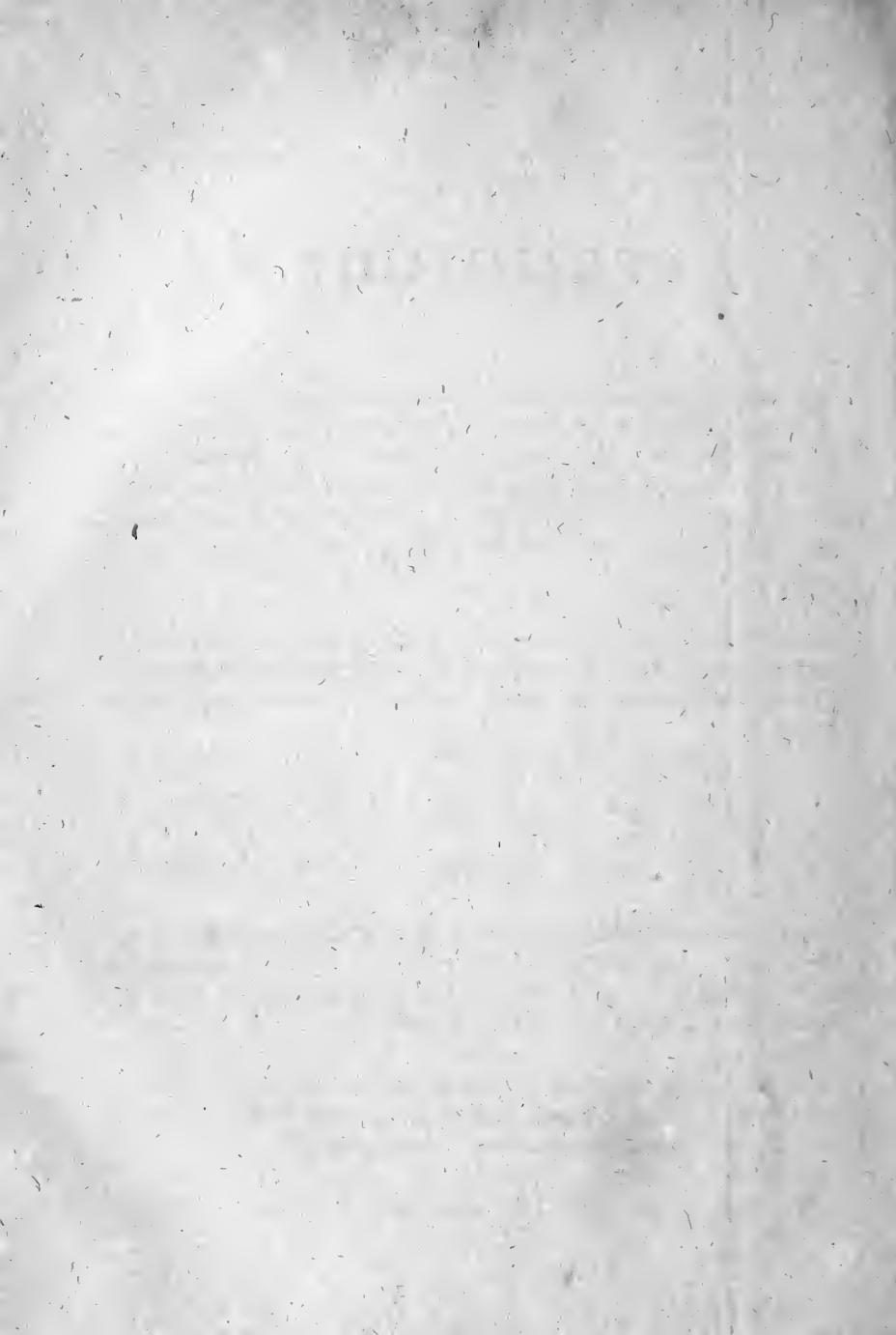
$\frac{\text{Rad.}}{3 \text{ Rad.}}$ ; & *summa rectarum* N X (in parallelis ad A S) æquatur spatio P L Q O.

Nam triangulum X M N triangulo S A C simile est; & inde X M. M N :: A S. C A. & X N. M N :: C S. C A. unde  $XM = \frac{MN \times AS}{CA}$ ; &  $XN = \frac{MN \times CS}{CA}$ . & ità in reliquis; unde liquet Profitum, ex 2, & 7 harum.



croß sculptit

Geo pag 114



## APPENDICULA 2.

**B** Revitati simul ac perspicuitati (huic autem præcipuè) consulentes præcedentia recto discursu comprobata dedimus; quali non modo veritas, opinor, satis firmatur, at ejusdem origo limpidius apparet. Verum nè quis, minùs hujusmodi ratiociniis adfuetus, hæreat, ista paucula subdemus, quibus tales discursus communiantur, quorumque subsidio non difficilè conficiantur *Propositorum demonstrationes apagogicæ*.

I. Sint quotlibet *rationes* A ad X, B ad Y, C ad Z, singulæ designatâ quâpiam ratione R ad S majores; erit *omnium antecedentium* (simul acceptarum) ad *omnes consequentes ratio* major ratione R ad S.

A . X .	A . M .
---------	---------

B . Y .	B . N .
---------	---------

C . Z .	C . O .
---------	---------

Nam sint rationes A ad M, B ad N, C ad O singulæ æquales rationi R ad S. ergo  $X \supset M$ ; &  $Y \supset N$ ; ac  $Z \supset O$ . patet igitur fore  $A \vdash B \vdash C. X \vdash Y \vdash Z \sqsubset A \vdash B \vdash C. M \vdash N \vdash O$ . hoc est  $A \vdash B \vdash C. X \vdash Y \vdash Z \sqsubset R. S$ .

II. Hinc patet, si quotlibet rationes singulæ designabili quâcunque majores sint, *antecedentium summam ad summam consequentium* etiam designabili quâcunque majorem rationem habere.

III. Sit curva quævis A D B, cujus axis A D, & ad hunc applica- Fig. 174.

Fig. 174.

ta recta  $BD$ ; curvam verò tangat recta  $BT$ ; sitque  $BP$  rectæ  $BD$  particula indefinitè parva; ducaturque recta  $PO$  ad  $DT$  parallela, curvam secans ad  $N$ ; dico  $PN$  ad  $NO$  rationem habere majorem quavis designabili, puta quàm  $R$  ad  $S$ .

Nam sit  $DE.ET::RS$ ; connexaque recta  $BE$  curvam fecerit in  $G$ , rectam  $PO$  in  $K$ ; per  $G$  verò ducatur  $FH$  ad  $DA$  parallela. quoniam igitur  $BP$  ponitur indefinitè parva, est  $BP \rightarrow BF$ ; adeoque  $PK \rightarrow PN$  (nam subtenfa  $BG$  intra curvam tota cadit). ergo  $PN.NO \leftarrow PK.KO::DE.ET::R.S$ .

IV. Hinc, si basis  $DB$  in partes secetur indefinitè multas ad puncta  $Z$ ; & per hæc ducantur rectæ ad  $DA$  parallelæ curvam secantes punctis  $E, F, G$ ; per hæc verò ducantur *Tangentes*  $BQ, ER, FS, GT$  parallelis  $ZE, ZF, ZG, DA$  occurrentes punctis  $Q, R, S, T$ ; habebit recta  $AD$  ad omnes interceptas  $EQ, FR, GS, AT$  (simul sumptas) rationem quavis assignabili majorem.

Fig. 175.

Nam ducantur rectæ  $EY, FX, GV$  ad  $BD$  parallelæ. Habent igitur rectæ  $ZE, YF, XG, VA$  ad rectas  $EQ, FR, GS, AT$  (singulæ ad singulas sibi in directum positas respectivè) rationem designabili quâcunque majorem. ergo simul omnes istæ ad has simul omnes *rationem* habent designabili quavis *majorem*; hoc est recta  $AD$  ad  $EQ \rightarrow FR \rightarrow GS \rightarrow AT$  ejusmodi rationem habet.

V. Hinc inter computandum, omnes  $EQ, FR, GS, AT$  simul acceptæ nihilo æquivalent; seu rectæ  $ZE, ZQ$ ; &  $ZF, YR$ , &c. æquantur; item tangentium particulæ  $BQ, ER$ , &c. respectivis *curva* portiunculis  $BE, EF$ , &c. pares, & quasi coincidentes haberi possunt. quin & adsumere tuto licet, quæ evidentè his cohærent.

Fig. 176.

VI. Sit porro *curva* quævis  $AB$ , cujus *Axis*  $AD$ , & ad hunc applicata  $DB$ ; æquifecetur autem  $DB$  in partes indefinitè multas ad puncta  $Z$ , per quæ ducantur rectæ ad  $AD$  parallelæ, curvam  $AB$  interfecantes punctis  $X$ ; quibus occurrant per ipsa  $X$  ductæ ad  $BD$  parallelæ rectæ  $ME, NF, OG, PH$ ; sit autem segmento  $ADB$  (rectis  $AD, DB$ , & curvâ  $AB$  comprehenso) *circumscripta figura*  $ADBMXNXOXPR$  major *spatio* quodam  $S$ ; dico *segmentum*  $ADB$  non esse minus quàm  $S$ .

Nam si fieri potest sit  $ADB$  minus quàm  $S$  excessu *rectangulum*  $ADLK$  adæquante. & quoniam  $AR$  est indefinitè parva, adeoque minor quàm  $AK$ , liquet rectangulum  $ADZR$  minus esse *rectangulo*  $ADLK$ .

ADLK. item patet *segmentum* ADB unâ cum *rectangulo* ADZR majus esse *figurâ circumscriptâ* (etenim *rectangulum* ADZR *rectangulis* RH, PG, OF, NE, MZ æquatur, proindeque majus est *trilineis* AXR, XXP, XXO, XXN, XBM). ergo *segmentum* ADB Fig. 176, unâ cum *rectangulo* ADLK multo majus est *figurâ circumscriptâ*; hoc est, *spatium* S majus est *figurâ circumscriptâ*, contra *Hypothesin*.

VII. Item, si ponatur *figura inscripta* HXGXFEXZDH minor *spatio* quodam S; dico *segmentum* ADB non esse majus quàm S.

Nam si majus esse velis, esto rursus *excessus* par *rectangulo* ADLK; quod utique (sicut prius) majus erit *rectangulo* ADZR. Est autem *segmentum* ADB, dempto *rectangulo* ADZR, minus *figurâ inscriptâ*. ergo *segmentum* ADB, dempto *rectangulo* ADLK, multo minus fit *inscriptâ figurâ*; hoc est *spatium* S minus est *inscriptâ figurâ*, contra *Hypothesin*.

VIII. Hinc, si *spatium* quodcunque fuerit, (puta S) cui *circumscripita* *figura* æquetur *figura* ADEMNOPRA; nec non cui *inscripta* *figura* æquetur *figura* HGFEZDH; palàm est *spatium* istud S *segmento* ADB exæquari.

Nam (utî mox ostensum) hoc illo majus esse nequit, aut minus.

Poterunt autem hæc ad *alios circumscriptionis ac inscriptionis modos* accommodari. suffecerit innuisse.

### *Conicorum Superficies dimetiendi Methodus.*

Si *curva* quæpiam AMB, cujus *Axis* AD, & in hoc signatum punctum C; ad ipsum verò ordinata recta BD. à puncto quopiam M in curva sumpto ducatur recta ME curvam tangens, & à C demittatur CG ad ME perpendicularis; sit item determinata recta CV ad planam DAB recta, & connectatur VG (erit VG ipsi MG perpendicularis; nam si ducatur CH ad GM parallela, liquet CH plano GVG rectam esse, adeoque GM eidem recta erit) Porro sit linea RS talis, ut ductâ rectâ MIX ad AD parallelâ (quæ secet ordinatam

Fig. 177.

Fig. 177.

dinatam BD in I, & lineam RS in X) sit MP.ME::VG.IX; vel, sit linea AL talis, ut ductâ MPY ad BD parallelâ (quæ secet axem AD in P, & lineam AL in Y) sit PE.ME::VG.PY; erit tunc utrumque *spatium* (singillatim) BRSD, vel ADL duplum *superficii conici*, quod ex recta per V & curvam AMB mota progeneratur.

Nam sumatur MN indefinita curvæ particula; & per N ducantur rectæ NOKT ad ipsam AD, & NQZ ad BD parallelæ (quæ lineas expositas, ut *Schema* monstrat, secent) connectanturque rectæ VM, VN. estque MO.MN::MP.ME::VG.IX. quare  $MN \times VG = MO \times IX = IK \times IX$ . Item est NO.MN::PE.ME::VG.PY. unde  $MN \times VG = NO \times PY = QP \times PY$ . Est autem MN  $\times VG$  duplum trianguli MVN. quapropter tam  $IK \times IX$ , quam  $QP \times PY$  duplum est trianguli MVN. pariter autem ubique fit. ergo constat Propositum.

### Exemplum.

Fig. 177.

Sit curva AMB *hyperbola æquilatera*, cujus Centrum C, sitque  $CV = CA = r$ . &  $CP = x$  (nam hujusmodi calculo plerunque rem expedit peragere) tum connexâ MC; patet esse  $EC = \frac{rr}{x}$ ; &  $MCq = 2xx - rr$  (nam  $PMq = xx - rr$ ) item est  $MCq.CPq::MEq.MPq$ ; hoc est  $MCq.CPq::ECq.CGq$ . hoc est  $2xx - rr.xx::\frac{r^4}{xx}.CGq = \frac{r^4}{2xx - rr}$ . quare  $VGq = \frac{r^4}{2xx - rr} + rr = \frac{2rrxx}{2xx - rr} = \frac{VAq \times CPq}{MCq}$ . vel  $VG = \frac{VA \times CP}{MC}$ . quare  $VG.VA::(CP.MC)::MP.ME$ . hinc consecutatur in hoc casu, quam ubique sit  $IX = VA$ , lineam RS fore rectam; & rectangulum BRSD *superficii conici* AMBV duplum esse.

Cæterum hoc *elegans exemplum* suppeditavit Generosus, ingenio ac eruditione præstans, Vir (Collegii nostri, quod olim Sociorum Commenſalis incoluit, ornamentum) D. Franciscus Jessopius, Armiger; cujus in hanc rem perquam ingenioso mihi comiter impertito scripto (ipsius injussu quidem, at spero non ingratiis) seu *Gemmâ* quâdam audebo mea condecorare.

Prop.



## Prop. 1.

Si à puncto E in axe Am coni recti ABCp recta infinita EC transeat per coni superficiem, & quiescente termino E circumferatur recta EC donec redeat ad locum à quo coepit moveri, ita ut semper aliqua pars ejus secet coni superficiem (puta per Hyperbolam CFD & rectas DA AC in superficie coni sitas) solidum comprehensum à superficie vel superficiei genitis à linea EC sic mota & à portione superficiei ejusdem coni terminatæ à linea vel lineis CFD, DA, AC quas recta EC circumlata describit in superficie conica, erit æquale Pyramidi cujus Altitudo est æqualis perpendiculari En à puncto E ad latus Coni deductæ basis verò æqualis eidem superficiei conicæ terminatæ à linea vel lineis CFD, DA, AC generatis à motu lineæ EC.

Fig. 178.

Solidum enim ECF, DA C constat ex infinitis pyramidibus ECoA E o o A, &c. æquialtis perpendiculari En, quarum bases omnes simul sumptæ, exhauriunt superficiem conicam CFD, DA, AC.

## Prop. 2.

Datus sit Conus rectus ABCp secetur à plano CFD axi Am parallelo ducantur rectæ AC, AD à vertice coni ad lineam hyperbolicam CFD, & super triangulo ACD erigatur pyramis EACD habens verticem E in axe coni; sitque Eδ plano ACD perpendicularis, & En lateri coni.

Fig. 178.

Dico, superficies conica terminata à linea hyperbolica CFD & rectis DA, AC ita se habet ad ACD basem pyramidis EACD ut altitudo Eδ pyramidis EACD ad perpendicularum En. Quoniam enim Conici ACFD, ECFD habent vertices A & E in plano basi CFD (quæ est utrique Conico communis) parallelo ergo sunt æquales. Si ergo à solido quod componitur à conico ACFD addito pyramide ECAD auferatur conicus ECFD reliquum erit solidum ECFD AC quale in propositione prima describitur motu rectæ EC æquale pyramidi EACD. Quoniam verò æqualium pyramidum reciproce sunt bases altitudinibus, ut altitudo Eδ pyramidis EACD ad perpendicularum En ita erit superficies conica terminata à linea hyperbolica CFD & rectis DA, AC ad Triangulum ACD. q. E. D.

Prop.

## Prop. 3.

Fig. 178.

Datus sit *Conus rectus*  $ABCp$ . Secetur à plano (puta *triangulo*  $qrt$ ) quod quidem planum secabit *axem coni* in puncto  $q$  supra *verticem* productum & in communi intersectione cum *superficie coni* habebit *lineam hyperbolicam*  $RSt$  ducantur à vertice coni *rectæ*  $Ar, At$ , à puncto  $q$  demittatur *perpendicularum*  $qX$  lateri coni  $Ap$  producto & à puncto  $A$  *perpendicularum*  $AZ$  plano  $qrt$ .

Dico *superficies conica* terminata à *linea hyperbolica*,  $rst$  & *rectis*  $rA, tA$ , ita se habet ad *figuram hyperbolicam cavam*  $qrstq$  ut *perpendicularum*  $AZ$  ad *perpendicularum*  $qX$ .

Recta enim  $qr$ , circumlata, quiescente termino  $q$  per lineas  $rst, tA, Ar$  generat tres *superficies*, nempe *hyperbolicam cavam*  $qr, st$ , & duo *triangula*  $qtA, qAr$ , quæ una cum *superficie conica* terminata à lineis  $rst, tA, Ar$ , comprehendunt *Solidum*  $qrst, tAr$ . Hoc verò *solidum* æquale est *pyramidi* cujus *altitudo* est æqualis *perpendicularo*  $qX$ , nam infinitæ *pyramides*  $qArV, qAVV$ , exhauriunt *solidum*  $qrst, tAr$ . Si verò aliter contemplari volumus, hoc *solidum*  $qrst, tAr$  potest considerari tanquam *figura conica*  $ArStqr$  habens pro *basse* *figuram hyperbolicam cavam*  $qrstq$ , & pro *altitudine* *perpendicularum*  $AZ$ . Ergò reciprocando *bases altitudinibus*, ut  $AZ$  ad  $qX$ , ita *superficies*,  $rst, tAr$  ad *figuram hyperbolicam cavam*  $qrstq$ .

## Prop. 4.

Fig. 179.

Datus sit *Conus rectus*  $ABhg$  secetur à plano  $HFEg$  per *axem* infra *verticem*, à puncto  $H$  ubi *planum* secat *axem coni*, demittatur  $HK$  *perpendicularum* lateri cuilibet coni & à vertice  $A$  *perpendicularum*  $AL$  plano  $HFEg$ .

Dico, *Superficies conica* terminata à lineis  $FEGGA, AF$  ita se habebit ad *planum*  $HFEg$  ut *perpendicularum*  $AL$  ad *perpendicularum*  $HK$ .

Probatur eodem fere eodem fere argumento quo superior.

## APPENDICULA 3.

Præcedentia recolenti nonnulla videntur elapsa, quæ forsan ex usu sit adjicere. *Demonstrationes* elicere poterit quispiam è præmissis; & potior inde fructus emerget.

## Problema I.

Fig. 180.

Sit *curva* quævis KEG, cujus *axis* AD; & in hoc signatum punctum A; curva reperiat, puta LMB, talis, ut si ductâ utcunque rectâ PEM axi AD perpendicularis curvam KEG secet in E, & curvam LMB in M; nec non connectatur AE, & curvam LMB tangat recta TM; sit TM ipsi AE parallela.

Hoc ita fiet. Per aliquodcunque punctum R, in axe AD sumptum, protendatur recta RZ ad ipsam AD perpendicularis; cui occurrat recta EA producta in S; & in recta EP sumatur PY = RS; ita determinetur curvæ OYY proprietates; tum sit rectangulum ex AR, &

PM æquale spatio AYYP (seu  $PM = \frac{\text{spat. AYYP}}{AR}$ ) habebit

curva LMMB conditionem propositam.

Adnotari potest, si stantibus reliquis, sit curva QXX talis, ut cum hanc secet recta EP in X, sit PX = AS; erit spatium AXXP

æquale rectangulo ex AR, & curva LM, seu  $\frac{AXXP}{AR} = LM$ .

## Exemp. I.

Sit ADG *circuli* quadrans, & ductâ EP ad AD utcunque perpendiculari, connexâque DE; designetur curva AMB talis, ut si producta recta EP M hanc secet in M, ipsamque tangat recta MT, sit MT ad DE parallela. Hoc ita peragetur. Ducatur AZ ad DG parallela; & huic occurrat producta DE in S, & curva AYY talis sit, ut si hanc secet producta PE in Y, sit PY = AS; tum capiatur  $PM = \frac{\text{Spat. AYP}}{AD}$ ; factum erit.

Fig. 181.

Not. Quòd si curva QXX talis sit, ut PX = DS (vel si AQ = AD, & QXX sit *hyperbola* angulo ADG comprehensa) erit curva AM x AD = spat. AQXP. R Exemp.

*Exemp. II.*

Fig. 182.

Sit curva  $AEG$  (cujus *axis*  $AD$ ) proprietate talis, ut si à quocunque puncto in ipsa sumpto  $E$ , ducatur recta  $EP$  ad  $AD$  normalis; connectaturque  $AE$ , sit  $AE$  inter designatam  $AR$ , &  $AP$  proportionem media, secundum ordinem, cujus exponens sit  $\frac{n}{m}$ ; reperiaturs curva  $AMB$ , quam tangat  $TM$  ad  $AE$  parallela.

De curva  $AM$  adnoto fore  $n.m :: AE \cdot \text{arc. } AM$ .

Si  $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$  (vel  $AE$  sit inter  $AR$ ,  $AP$  simpliciter media) erit  $AEG$  circulus, &  $AMB$  *Ciclois primaria*; hujus igitur dimensio è lege generali habetur.

Hæc etiam ex adjuncto *Problemate* magis ccomprehensivo peraguntur.

*Probl. II.*

Fig. 183.

Curva designetur, puta  $AMB$ , cujus *axis*  $AD$ , ità ut in hac sumpto puncto quopiam  $M$ , & ductâ  $MP$  ad  $AD$  perpendiculari, & posito rectam  $MT$  ipsam tangere, habeant  $TP$ ,  $PM$  relationem assignatam.

Accipiaturs recta quæpiam  $R$ , & fiat ut  $TP$  ad  $PM$  (quam utique rationem assignatâ dabit relatio) ità  $R$  ad  $PY$  (quæ nempe sumatur in recta  $PM$ , & ad axem  $AD$  ordinetur) sic ut per ejusmodi puncta

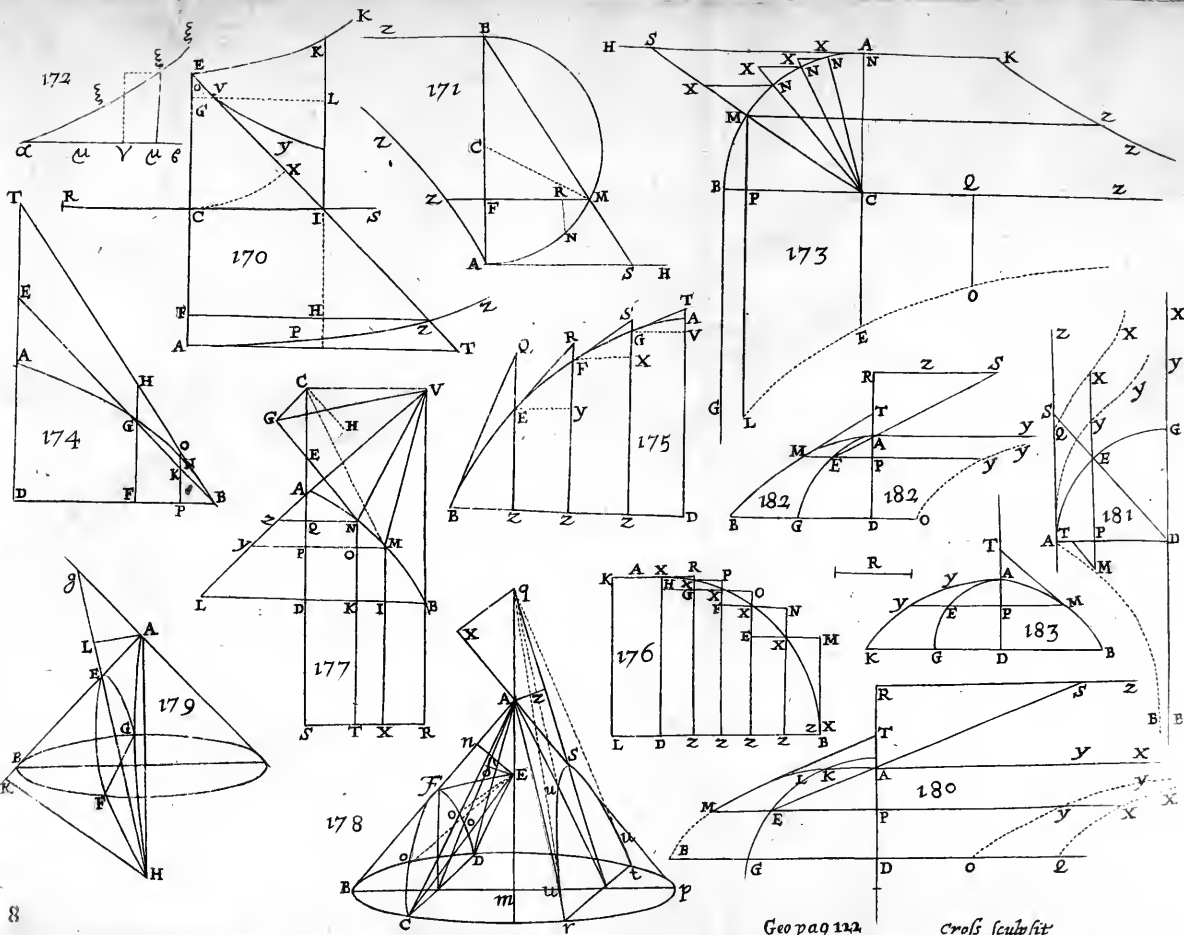
$Y$ , transeat curva  $Y Y K$ ; tum si fiat  $PM = \frac{\text{spat. } APY}{R}$ ; de curvæ  $AMB$  indè constabit natura.

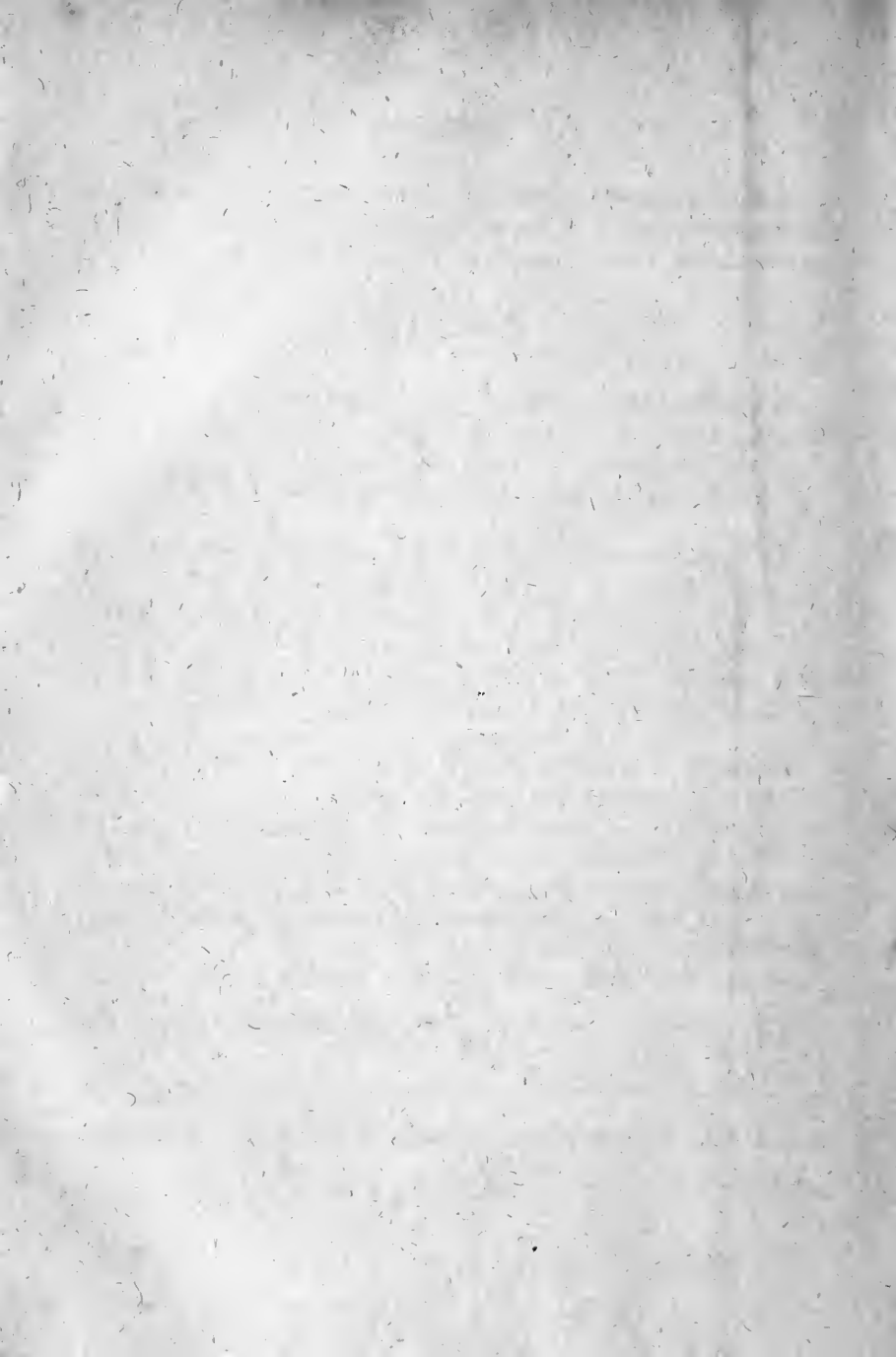
*Exemp. I.*

Fig. 184.

Sit  $ADG$  *circuli* quadrans; cujus radius æqueturs designatæ  $R$ ; & habere debeat  $TP$  ad  $PM$  rationem eandem quam habet  $R$  ad arcum  $AE$ ; ergo quum sit, juxta præscriptum,  $R \cdot \text{arc. } AE :: R \cdot PY$ ; erit  $PY = \text{arc. } AE$ ; hinc habetur  $PM = \frac{APY}{R}$ .

*Exemp.*





## Exemp. II.

Sit  $ADG$  circuli quâdrans, & habere debeat  $TP$  ad  $PM$  rationem eandem quam  $PE$  ad  $R$ ; est ergo  $PY$  æqualis *tangenti* arcûs  $GE$ ; & spat.  $APYY = R \times \text{arc. } AE$ . adeoque  $PM = \text{arc. } AE$ .

## Probl. III.

Proponatur figura quælibet  $ADB$  (cujus *axis*  $AD$ , *basis*  $DB$ ) Fig. 185.  
reperiatur curva  $KZL$ , proprietate talis, ut ductâ rectâ  $ZPM$  ad  $DB$  utcunque parallela quæ lineas expositas secet ut cernis) positoque rectam  $ZT$  tangere curvam  $KZL$ , sit intercepta  $TP$  æqualis ipsi  $PM$ .

Hoc ita perficietur. Sit curva  $OYY$  talis, ut adsumptâ quâdam  $R$ , protractâque  $P MY$ , sit  $PM.R :: R.PY$ ; tum liberè adsumptâ  $DL$  (in  $BD$  protensâ) sit  $DL.R :: R.LE$ ; & *asymptotis*  $DL$ ,  $DG$  per  $E$  describatur *Hyperbola*  $EXX$ ; tum sit spatium  $LEXH$  æquale spatio  $DOYP$ , & protractæ  $XH$ ,  $YP$  concurrant in  $Z$ ; erit  $Z$  in curva quæsita; quam si tangat  $ZT$ , erit  $TP = PM$ .

Adnotetur, si proposita figura sit *rectangulum Parallelogrammum*  $ADBC$ , quod curvæ  $KZL$  hæc erit proprietas, ut sit  $DH$  eodem ordine inter  $DL$ ,  $DO$  media *Geometricè* proportionalis, quo  $DP$  inter  $DA$  &  $o$  (seu nihilum) est media *Arithmeticè*; quod si liberè juxta proprietatem hanc describatur curva  $KZL$ , & *Mechanicè* reperiatur tangens  $ZT$ , indè quadrabitur *hyperbolicum spatium*  $LEXH$ ; erit utique hoc æquale *rectangulo* ex  $TP$ ,  $AP$ . Fig. 186.

Subnotari possit fore 1. Spat.  $ADLK = R \times DL - DO$ . 2. Summam  $ZPq = R \times \frac{DLq - DOq}{2}$ . & summam  $ZP \text{ cub.} = R \times \frac{DL \text{ cub.} - DO \text{ cub.}}{3}$  &c. 3. Si ponatur  $\phi$  esse centrum gr. figuræ  $ADLK$ , ducanturque  $\phi \downarrow$  ad  $AD$ , &  $\phi \xi$  ad  $DL$  perpendiculares, fore  $\phi \downarrow = \frac{DL + DO}{4}$ , &  $\phi \xi = R - \frac{AD \times DO}{LO}$ .

## Probl. IV.

Fig. 187.

Sit angulus  $E D H$  rectus, &  $B F$  ad  $D H$  parallela; & *asymptotis*  $D B$ ,  $D H$  per  $F$  descripta sit *hyperbola*  $F X G$ ; item centro  $D$  descriptus sit circulus  $K Z L$ ; sit denuo curva  $A M B$  talis, ut in hac sumpto quocunque puncto  $M$ , & per hoc trajectâ rectâ  $D M Z$ , item sumptâ  $D I = D M$ ; & ductâ  $I X$  ad  $B F$  parallêlâ, sit *spatium hyperbolicum*  $B F X I$  æquale duplo *circulari sectori*  $Z D K$ ; curvæ  $A M B$  tangens ad  $M$  determinetur.

Ducatur  $D S$  ad  $D M$  perpendicularis; sitque  $D B \times B F = R q$ ; fiatque  $D K . R :: R . P$ ; tum  $D K . P :: D M . D T$ ; & connectatur  $T M$ ; hæc curvam  $A M B$  tanget.

Adnotetur curvæ  $A M B$  hanc esse proprietatem; ut  $D I$  sit inter  $D B$ ,  $D O$  (vel  $D A$ ) eodem ordine *media proportionalis Geometricè*, quo arcus  $K Z$  inter  $o$  (seu nihilum) & arcum  $K L$  est medius *Arithmeticè*. hoc est, si  $D I$  sit numerus in serie *Geometricè proportionalium* incipiente à  $D B$ , & terminatâ in  $D A$ ; ac  $o$ ,  $K L$  sint Logarithmi ipsarum  $D B$ ,  $D A$ ; erit  $K Z$  Logarithmus ipsius  $D I$ . Vel retrò (prout vulgares *Logarithmi* procedunt, si  $D I$  sit numerus in serie *Geometrica* exorsa à  $D O$ , & desinente in  $D B$  ac  $o$  sit *Logarithmus* ipsius  $D O$ , & arcus  $L K$  ipsius  $D B$ , erit arcus  $L Z$  *Logarithmus* ipsius  $D I$ .

Quod si absolutè construatur curva  $A M B$ , ejusque *tangens Mechanicè* deprehendatur, inde patet *hyperbolici spatii Cyclismum* dari, vel *Circuli hyperbolismum*.

Hujusce *Spiralis* naturam, ac dimensionem (ut & *Spatii B D A* dimensionem) luculentè profecutus est præclarissimus *D. Wallissius*, in Libro de *Cycloide*; quapropter de illa plura reticeo.

## Probl. V.

Fig. 188.

Sit spatium quodpiam  $E D G$  (rectis  $D E$ ,  $D G$ , & linea  $E N G$  comprehensa) & data quædam  $R$ ; curva  $A M B$  reperiatur talis, ut si utcunque à  $D$  projiciatur recta  $D N M$ , &  $D T$  ad hanc perpendicularis sit, &  $M T$  curvam  $A M B$  contingat; sit  $D T . D M :: R . D N$ .

Sit curva  $K Z L$  talis, ut  $D Z = \sqrt{R \times D N}$ ; sumptâque liberè rectâ



rectâ DB, sit DB.R::R.BF (sit autem BF, ut & DH ipsi DB perpendicularis) tum per F, angulo BDH inclusa, transeat *hyperbola* FXX; sitque spatium BFXI (positâ nempe IX ad BF *parallelâ*) æquale duplo spatio ZDL; sit denuò DM = DG; erit M in curva quæsitâ; quam utique si tangat recta TM, erit TD.DM::R.DN.

Probl. VI.

Sit rursus spatium EDG (ut in præcedente) reperienda est curva AMB, ad quam si projiciatur recta DN M, & sit DT huic perpendicularis, & MT curvam AMB tangat, fuerit DT = DN.

Fig. 188.

Adsumatur quæpiam R, & sit  $DZq = \frac{R^3}{DN}$ ; item acceptâ DB (cui perpendiculares DH,  $BF = \frac{R^3}{DBq}$ ; & per F intra *asymptotos* DB, DH describatur *hyperboliformis* secundi generis (in qua nempe ordinatæ, ceu BF, vel IX, sint quartæ proportionales in ratione DB ad R, vel DG ad R) tum capiatur spatium BIXF æquale duplo ZDL; & sit DM = DI; erit M in curva quæsitâ; quam si tangat MT, erit DT = DN.

Probl. VII

Sit figura quævis ADB (cujus *axis* AD, *basis* DB) & utcumque ductâ PM ad DB parallelâ datum sit (seu expressum quomodocunque) spatium APM, oportet hinc ordinatam PM exhibere, vel exprimere.

Fig. 189.

Acceptâ quâpiam R, sit  $R \times PZ = APM$ ; hinc emergat linea AZZK; huic perpendicularis reperiatur ZO; tum erit PZ.PO::R.PM.

*Exemp.* AP vocetur  $x$  & sit  $APM = \sqrt{rx^3}$ , ergo  $PZ = \sqrt{\frac{x^3}{r}}$ ; unde reperiatur  $PO = \frac{2xx}{2r}$ . Estque  $\sqrt{\frac{x^3}{r}} \cdot \frac{3xx}{2r} :: r \cdot \frac{3}{4} \sqrt{rx} = PM$ . unde AMB est *Parabola*, cujus *Parameter* est  $\frac{5}{4}r$ . *Aliter.*

*Aliter.* Fiat  $PZ = \sqrt{2} AP M$ . & sit  $ZO$  curvæ  $AZK$  perpendicularis; erit  $PM = PO$ .

*Exemp.* Sit  $AP = x$ ; &  $APM = \frac{x^3}{r}$ . quare  $PZ = \sqrt{\frac{2x^3}{r}}$   
unde reperietur  $PO = \frac{3xx}{r} = PM$ ; & rursus  $AMB$   
erit *Parabola*.

### Probl. VIII.

Fig. 190.

Sit figura quævis  $ADB$  (reâs  $DA$ ,  $DB$ , & linea  $AMB$  comprehensa) & à D utcumque projectâ rectâ  $DM$ , datum sit spatium  $ADM$ ; oportet rectam  $DM$  definire.

Acceptâ quâpiam  $R$ , sit  $DZ = \frac{2ADM}{R}$ ; &  $ZO$  curvæ  $AZK$  perpendicularis; cui occurrat  $DH$  ad  $DM$  perpendicularis; erit  $DM = \sqrt{R \times DO}$ .

*Aliter.* Sit  $DZ = \sqrt{4ADM}$ ; &  $ZO$  curvæ  $AZK$  perpendicularis; cui occurrat  $DH$  ad  $DZ$  perpendicularis; erit  $DM = \sqrt{DZ \times DO}$ .

*De figuris involutis & evolutis bellam & utilis instituit Praclarus Geometra D. Gregorius Alerd.* Alienæ messi nollem ego falcem meam immittere, verum liceat utcumque isthuc pertinentes (aliud agenti quæ mihi se ingesserunt) unam aut alteram observatiunculam his intexere.

### Probl. IX.

Fig. 191.

Data sit figura quæpiam  $ADB$  (cujus *axis*  $AD$ , *basis*  $DB$ ) oportet ei congruentem involutam exhibere.

Fig. 192.

*Centro*  $C$ , intervallo quopiam  $CL$  describatur *Circulus*  $LXX$ ; sit autem curva  $KZZ$  talis, ut pro lubitu ductâ rectâ  $MPZ$  ad  $BD$  parallelâ,

parallelâ, sit rectangulum ex PM, PZ æquale quadrato ex CL (vel  $PZ = \frac{CL \cdot q}{PM}$ ). Sit tum arc. LX =  $\frac{\text{spat. DKZP}}{CL}$  (vel sector LCX subduplus spatii DKZP) & in CX capiatur  $C\mu = PM$ ; erit linea  $C\mu\mu$  ipsius BMA involuta; vel spatium  $C\mu C$  spatii ADB.)

*Exemp.* Sit ADB circuli quadrans; erit ergò (quod è præmonstratis constat) spat. DKZP (2 sector LCX). sect. BDM :: CL q. DB q. unde arc. LX. arc. BM :: CL. DB. quare ang. LCX = ang. BDM = ang. DMP. unde ang.  $C\mu C$  est rectus, adeoque linea  $C\mu C$  est semicirculus.

*Coroll.* 1. Subnotari potest, si duæ figuræ ADB, ADG analogæ fuerint; & harum involutæ sint  $C\mu C$ ,  $C\nu C$ ; & fuerit  $C\mu . C\nu$  Fig. 193.  
:: DB. DG; erit reciprocè ang.  $C\mu C$ .  $C\nu C$  :: DG. DB.

2. Illud etiam conversè valet.

3. Sin curvæ  $C\nu C$ , CS $C$  suo modo analogæ fuerint, hoc est, si utcumque à C projectâ rectâ  $C\nu S$ , habeant  $C\nu$ , CS eandem perpetuò rationem, erunt hæ similium linearum involutæ. Fig. 194.

## Probl. X.

Data figurâ quâpiam  $C\phi$  rectis  $C\epsilon$ ,  $C\phi$ , & aliâ lineâ  $C\phi$  Fig. 195.  
comprehensâ, ei competentem evolutam designare.

Centro C utcumque describatur circularis arcus LE (cum rectis  $C\epsilon$ ,  $C\phi$  constituens sectorem LCE) tum ductâ CK ad LC perpendiculari, sit curva  $CYH$  itâ rectam CK respiciens, ut liberè projectâ rectâ Fig. 196.  
 $C\mu Z$ , sumptâque CO = arc LZ, ductâque OY ad CK perpendiculari, sit OY =  $C\mu$ ; porro ad rectam DA sic referatur curva BMF, ut cum sit  $DP = \frac{\text{spat. C\epsilon YO}}{CL}$ ; & PM ad DA perpendicularis; sit etiam PM =  $C\mu$ ; erit spatium DBFA ipsius  $C\epsilon\phi$  evolutum.

*Exemp.* Sit LZE arcus circuli centro C descripti, &  $C\mu C$  ejusmodi Fig. 197.  
spiralis

*spiralis*, ut pro arbitrio ductâ rectâ  $C\mu Z$  habeat arcus  $EZ$  ad rectam  $C\mu$  rationem assignatam (puta  $R$  ad  $S$ ) Manifestum est lineam  $EYH$  esse rectam, quoniam  $EZ (KO) \cdot C\mu (OY) :: R \cdot S$ , perpetuò. unde evoluta  $BME$  fit *Parabola*; quoniam axis partes  $AP$ ,  $AD$  se habent ut spatia  $KOY$ ,  $KC\epsilon$ , hoc est ut quadrata ex ipsis  $OY$ ,  $C\epsilon$ , vel ex ipsis  $PM$ ,  $DB$ .

Fig. 198.

*Corol. Theor. I.*

Si ad figuram  $CC\phi$  erigatur *cylindricus* altitudinem habens æqualem peripheriæ integræ *circuli*, cujus radius  $CL$ ; erit iste *cylindricus* æqualis *solido*, quod procreatur è figurâ  $CEHK$  circa axem  $CK$  rotatâ.

*Theor. II.*

Fig. 195.

Sit curva quæpiam  $AMB$  (cujus axis  $AD$ , basis  $DB$ ) & curva  $AZL$  talis, ut liberè ductâ rectâ  $ZPM$ , sit  $PZ = \sqrt{2} APM$ ; sit item alia curva  $OYY$  talis, ut ad hanc productâ rectâ  $ZPMY$ , adsumptâque rectâ  $R$ , sit  $ZPq \cdot Rq :: PM \cdot PY$ ; sitque denuò  $DL$ .  $R :: R \cdot LE$ . & per  $E$  intra angulum  $LDG$  describatur *Hyperbola*  $EXX$ ; huic autem occurrat ducta recta  $ZHX$  ad  $AD$  parallela, erit spatium  $PDOY$  æquale *spatio Hyperbolico*  $LHXE$ .

Fig. 199.

$$\text{Hinc summa omnium } \frac{PM}{APM} = \frac{2LEXH}{Rq}.$$

*Theor. III.*

Sit curva quæpiam  $AMB$ , cujus axis  $AD$ , basis  $DB$ , & curva  $KZL$  talis, ut adsumptâ quâdam  $R$ , & arbitrariè ductâ rectâ  $ZPM$  ad  $BD$  parallêla, sit  $\sqrt{APM} \cdot PM :: R \cdot PZ$ ; erit spatium  $ADLK$  æquale *rectangulo* ex  $R$  in  $2\sqrt{ADB}$ ; vel  $\frac{ADLK}{2R} = \sqrt{ADB}$ .

Fig. 200.

*Exemp.* Sit  $ADB$  circuli quadrans, erit summa omnium  $\frac{PM}{APM} = \sqrt{2} DA \times \text{arc. } AB$ .

*Theor. IV.*

Sit curva quæpiam  $AMB$  (cujus axis  $AD$ , basis  $DB$ ) sintque duæ lineæ  $EXK$ ,  $GYL$  ita relatæ, ut in curva  $AMB$  sumpto quopi-

am

am puncto M, ductisque rectis MPX ad BD, & MQY ad AD parallelis, positoque rectam MT tangere curvam AMB, sit TP.PM::QY.PX; erunt figuræ ADKE, DBLG sibimet æquales. Fig. 201.

Valeat hoc conversum. Nempe si figuræ ADKE, DBLG æquantur, & MT curvam AMB tangat, erit TP.PM::QY.PX.

Not. Omnium hæcenus Propositorum fecundissimum est hoc Theorema; præcedentium quippe complura vel in eo continentur, aut ab eo facile confectantur. Nam posito lineam AMB indeterminatam esse naturâ, si ipsarum EXK, GYL alterutra pro tuo arbitratu determinetur, exinde resultabit Theorema quoddam ejusmodi, qualia superius exhibentur aliquamulta. Si e.g. linea GYL ponatur recta cum ipsa BD semi-rectum constituens angulum (quo casu concipiuntur puncta D, G coincidere) proveniet inde prima *Lectionis* XI. Si GYL sit recta ad DB parallela, emerget *Lectionis ejusdem*. Rursus si PM = PX (vel lineæ AMB, EXK sint eadem) consequetur hinc *decima* ejusdem. Exhinc porro liquet adsumpto cuilibet spatio *infinita, genere diversa, spatia aequalia* facillè designari veluti si spatium DGLB ponatur *circuli quadrans*, cujus centrum D; & curva AMB sit *parabola*, cujus axis AD, emerget curvæ EXK hæc proprietas, ut (si dicatur DB = r; AP = x; PX = y; & k (vel  $\frac{DB}{2AD}$ ) sit *parabola semiparameter*) sit  $\frac{rrk}{2} = kx \mp xyy$ . Sin AMB ponatur *hyperbola*, procreabitur alterius generis curva EXK. his autem expensis ἀβλεψίαν meam incuso, qui non hoc Theorema (sicut & ea quæ subsequuntur, quorum ferè ratio consimilis est, & super usus) primo loco posuerim, & ex eo (nec non è reliquis mox subijciendis) quod fieri posse video, reliqua deduxerim. Veruntamen hujusmodi Phrygiam sapientiam juxta mecum plerisque familiarem autumo, literas has tractantibus.

## Theor. V.

Sit spatium quodpiam ADB (rectis DA, DB, & curva AMB comprehensum) sint item curvæ EXK, GYL ita relatæ, ut si in curva AMB liberè sumatur punctum M, ducatur DMX, sit DQ = DM, ducatur QY ad DB perpendicularis, sit DT ad DM perpendicularis, recta MT curvam AMB contingat; si, his inquam suppositis, sit TD.DM::DM x QY.DXq; erit spatium DGLB spatii EDK duplum. S Theor.

Fig. 203.

## Theor. VI.

Fig. 204.

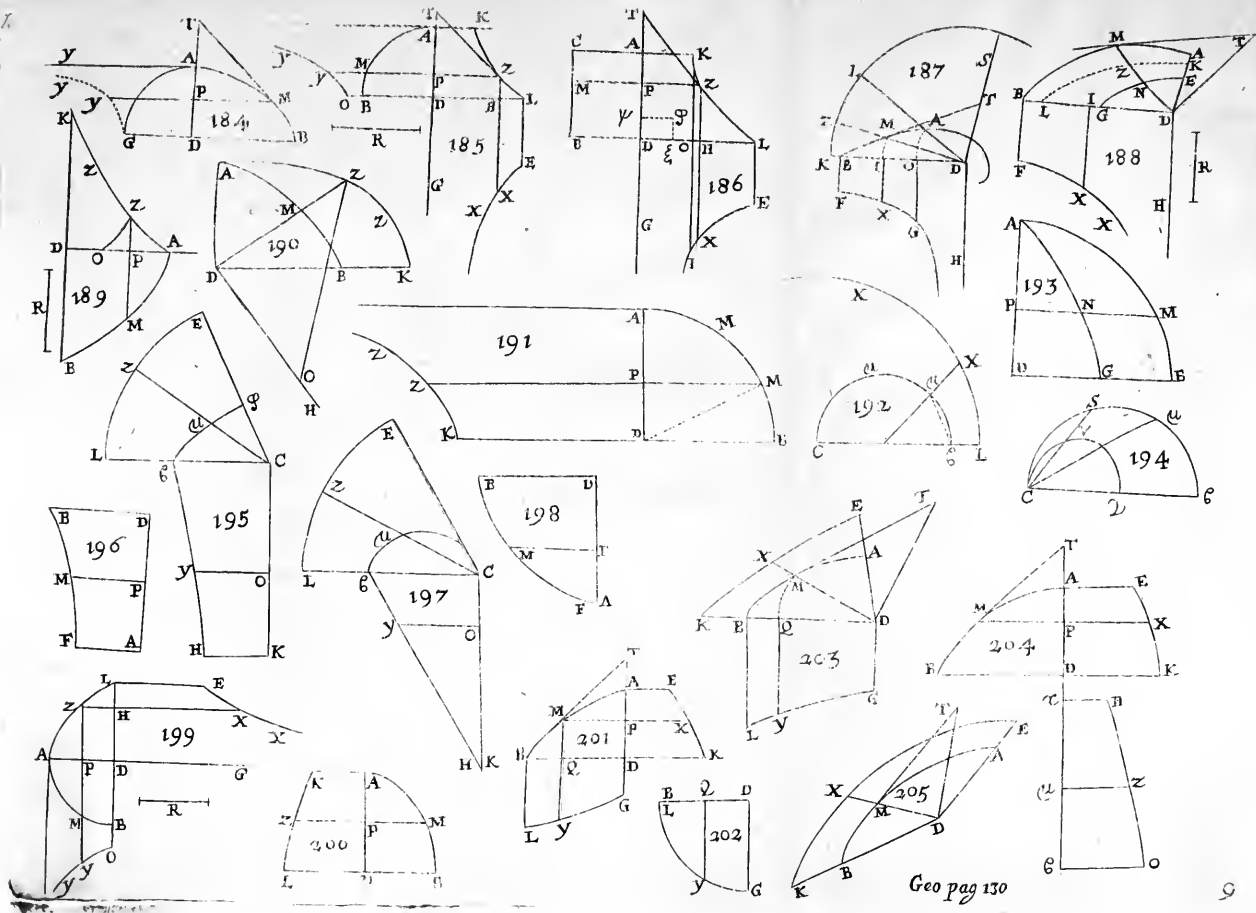
Sit rursus  $A M B$  curva quævis (cujus axis  $A D$ , basis  $D B$ ) & curvæ  $E X K$ ,  $H Z O$  ita versus se, & axes  $A D$ ,  $\alpha c$  relatæ, ut arbitrariè in curva  $A M B$  accepto puncto  $M$ , & ductâ  $M P X$  ad  $A D$  perpendiculari, sumptâ  $\alpha \mu = \text{arc } A M$ , ductâ  $\mu Z$  ad  $\alpha c$  perpendiculari, positoque rectam  $T M$  curvam  $A M B$  tangere; sit  $T P . T M :: \mu Z . P X$ ; erunt spatia  $A D K E$ ,  $\alpha c O H$  æqualia sibi.

## Theor. VII.

Fig. 204,  
205.

Sit spatium quodpiam  $A D B$  (rectis  $D A$ ,  $D B$ , & curvâ  $A M B$  definitum) sint item curvæ  $E X K$ ,  $H Z O$  ita relatæ, ut si quodvis capiatur punctum  $M$  in curva  $A M B$ , projiciatur recta  $D M X$ , sumatur  $\alpha \mu = \text{arc } A M$ ; ducatur  $\mu Z$  ad rectam  $\alpha c$  perpendicularis; sit  $D T$  perpendicularis ipsi  $D M$ ; recta  $M T$  curvam  $A M B$  tangat; sit  $T D . T M :: D M \times \mu Z . D X q$ ; erit spatium  $\alpha c O H$  spatii  $E D K$  duplum.

Sed horum hic esto terminus.







## LECT. XIII.

**Æ** *Quationum naturam è terminorum analogia exposuit Vieta; illam ex eorum in se ductu dilucidius explicuit Cartesius. Eam ego jam è linearum singulis appropriatarum descriptione conabor aliquatenus enucleatam dare; qui sanè modus rem præsertim elucidare videtur, ac ob oculos ponere, agendum.*

*Notetur, In sequentibus perpetim ad easdem series redigi æquationes, quæ coefficientes habent easdem.*

### *Æquationum Series prima.*

$$\begin{aligned} a + b &= n. \\ aa + ba &= nn. \\ a^3 + baa &= n^3. \\ a^4 + ba^3 &= n^4, \&c. \end{aligned}$$

Sumatur recta B A æqualis coefficienti  $b$ , & hæc versus H indefinitè protendatur; sint anguli R A H, S B H semirecti, sintque lineæ A L L, A M M, A N N tales, ut rectâ G K ductâ ad A H utcumque perpendiculari (quæ dictas lineas ordine secet punctis L, M, N; rectasque B S, A R punctis K, Z) sit inter G Z, G K *media* G L\*, *bi-* \* Vid. pag. 96.  
*media* G M, *trimedia* G M; hæc lineæ propositarum æquationum naturæ explicandæ inservient. Nam si A G (vel G Z) dicatur  $a$ ; erit B G (vel G K)  $= b + a$ ; atque G L  $q = aa + ba$ ; & G M cub.  
 $= a^3 + baa$ ; & G N  $q q = a^4 + ba^3$ .

*Notetur autem,*

Fig. 206.

1. Ducta  $AD$  ad  $BH$  perpendiculari, si in hac capiatur  $AE = n$ ; ducaturque  $EF$  ad  $AH$  parallela; hujus cum lineis expositis intersectiones æquationum propositarum radices exhibebunt respectivè; erit utique  $EK$ , vel  $EL$ , vel  $EM$ , vel  $EN$  æqualis ipsi  $a$ ; hoc est ipsis  $AG$ , concipiendo à singula intersectione deduci ad  $AH$  perpendiculares, quæ puncta  $G$  determinet.

2. Quò punctum  $G$  magis à termino  $A$  removetur (& quidem potest  $GA$  desumi quavis designatâ major) eò ordinatæ  $GK, GL, GM, GN$  magis increſcunt; adeò ut quantacunque ponatur  $AE$ , parallela  $EF$  curvis occurrere sit; & proinde semper habetur vera radix istarum æquationum cuilibet conveniens; & ea tantum una, quoniam  $EF$  curvas istas unico puncto interfecat.

3. Curva  $ALL$  est hyperbola æquilatera, cujus axis  $AB$ , reliquæ  $AMM, ANN$  sunt hyperboliformes.

4. Si  $AO$  sit  $\frac{1}{2} AB$ ; &  $AP = \frac{1}{3} AB$ , &  $AQ = \frac{1}{4} AB$ , ducanturque  $OT, PV, QX$  ad  $BS$  parallelæ, erunt hæ curvarum  $ALL, AMM, ANN$  asymptoti.

5. Hinc constat in secundo gradu fore  $a \sqsubset n - \frac{b}{2}$ ; in tertio  $a \sqsubset n - \frac{b}{3}$ ; in quarto  $a \sqsubset n - \frac{b}{4}$ ; quæ tamen inæqualitates, si  $AE$  benemagna sit, exiguæ erunt.

6. Æquationibus istis nulla competit maxima, vel minima.

### Series secunda.

$$\begin{aligned} a - b &= n. \\ aa - b^2 &= nn. \\ a^3 - baa &= n^3. \\ a^4 - ba^3 &= n^4, \&c. \end{aligned}$$

Fig. 207.

Sit rursus  $AB = b$ ; & indefinitè protrahatur  $AB$  versus  $I$ , & sint anguli  $RAI, SBI$  semirecti; tum concipiantur curvæ  $BLL, BMM, BNN$  tales, ut si utcunque ducatur  $GZ$  ad  $AI$  perpendicularis (dictas lineas secans, uti cernis, punctis  $K, L, M, N, Z$ ) sit inter  $GZ,$

GZ, GK media GL, bimedia GM, trimedia GN; propositas æquationes explicabunt hæ lineæ. Nam si AG (vel GZ) vocetur  $a$ ; erit BG (vel GK)  $= a - b$ ; & GLq  $= aa - ba$ ; & GM cub.  $= a^3 - baa$ ; & GNqq  $= a^4 - ba^3$ .

Not.

1. Ductâ AD ad AI perpendiculari, & EF ad AI parallelâ, si AE ponatur æqualis ipsi  $n$ ; erunt EK, EL, EM, EN radices æquationum respectivæ, seu æquales quæsitis  $a$ .

2. Quoniam ordinatæ GK, GL, GM, GN à termino B versus I infinitè excrescunt, semper habetur una vera radix, & unica.

3. Curva BL est hyperbola æquilatera, cujus axis AB, reliquæ curvæ sunt hyperboliformes.

4. Si AB bisecetur in O, trisecetur in P, quadrisecetur in Q, ducanturque ad AR parallelæ OT, PV, QX, erunt hæ curvarum BLL, BMM, BNN asymptoti.

5. Hinc sequitur in secundo gradu fore  $a \approx n + \frac{b}{2}$ ; in tertio  $a \approx n + \frac{b}{3}$ ; in quarto  $a \approx n + \frac{b}{4}$ ; quòd si  $n$  satis magna sit, istæ inæqualitates ad æqualitatem proximè accedunt.

6. Verarum in his radicum habetur minima; scilicet ipsa AB, vel  $b$ .

### Series tertia.

$$b - a = n.$$

$$ba - aa = nn.$$

$$baa - a^3 = n^3.$$

$$ba^3 - a^4 = n^4, \&c.$$

Fig. 280.

Sit  $AB = b$ , & anguli RAB, SBA semirecti; tum curvæ ALB, AMB, ANB tales, ut ductâ rectâ GK ad AB utcumque perpendiculari (quæ lineas expositas secet, ut vides) sit inter AG (seu GZ) & GK media GL, bimedia GM, trimedia GN; propositas æquationes explicatas dabunt hæ lineæ. Nam posito fore AG  $= a$ , erit GK  $= b - a$ ; & GLq  $= ba - aa$ ; & GMq  $= baa - a^3$ . & GNq  $= ba^3 - a^4$ .

Not.

Not.

Fig. 208.

1. Si in AD (ad ipsam AB perpendiculari) desumatur AE =  $n$ ; & ducatur EF ad AB parallela, hujusce cum lineis expofitis intersectiones exhibebunt radices  $a$  respectivè.

2. Cum ad hæcæ curvas ordinatæ semper terminatæ sint, & inter ipsas maxima quædam detur, hujus *seriei æquationes*, pro modulo assignatæ AE (vel  $n$ ) subinde duas radices veras habent (cùm utique fuerit AE curvæ maximâ ordinatâ minor respectivè, hoc est cùm EF curvæ bis occurrerit) nonnunquam duntaxat unam (cùm AE nempe maximam adæquet, adeoque EF curvam contingat) aliquando nullam (cum scilicet AE maximam excedat, adeoque nec EF curvæ unquam occurrat).

3. In secundo gradu si AO = OB, & ordinetur OT, erit OT maxima; (adeoque radicum una major quàm  $\frac{AB}{2}$ , altera minor) in tertio, si AP = 2 PB, & ordinetur PV, erit PV maxima (unde radicum una major erit quàm  $\frac{1}{3}$  AB, altera minor) demùm in quarto gradu si AQ = 3 QB, & ordinetur QX, erit QX maxima (& hinc una radicum semper major, quàm  $\frac{1}{4}$  AB, & altera minor).

4. Hinc confectatur, si fuerit, in secundo gradu  $n^2 \sqsubset \frac{b}{2}$ ; in tertio  $n^3 \sqsubset \frac{4b^3}{9} - \frac{8b^3}{27} = \frac{4b^3}{27}$ ; in quarto  $n^4 \sqsubset \frac{27}{64}b^4 - \frac{81}{256}b^4 = \frac{27b^4}{256}$ ; nullam dari radicem.

5. Omnium radicum maxima est ipsa AB, vel  $b$ .

6. Omnium curvarum communis *intersectio* (seu *nodus*) est punctum T; & si fuerit  $n = \frac{b}{2}$ ; semper AO (vel  $\frac{b}{2}$ ) est una radix.

7. Curva ALB est *Circulus*, reliquæ AMB, ANB eum quodammodo referunt.

1.	2.	3.
$\left. \begin{aligned} a + b &= n \\ a + b &= \frac{nn}{a} \\ a + b &= \frac{n^3}{aa} \\ a + b &= \frac{n^4}{a^3} \end{aligned} \right\}$	$\left. \begin{aligned} a - b &= n \\ a - b &= \frac{nn}{a} \\ a - b &= \frac{n^3}{aa} \\ a - b &= \frac{n^4}{a^3} \end{aligned} \right\}$	$\left. \begin{aligned} b - a &= n \\ b - a &= \frac{nn}{a} \\ b - a &= \frac{n^3}{aa} \\ b - a &= \frac{n^4}{a^3} \end{aligned} \right\}$

Aliter

Aliter (& forte commodius ; pro singulo trium serierum gradu tantum unam adhibendo lineam) explicantur istæ præcedaneæ æquationes, hoc pacto :

Sit A H recta indefinitè protensa, & huic perpendicularis A D ; in qua sumatur A B =  $n$ , & ducatur B K ad A H parallela, tam sint lineæ L X L, M X M, N X N tales, ut sumpto in A H quocunque puncto G, & ductâ G K ad A D parallelâ, sit in proportione A G ad G K (vel A B) proportione *tertia* G L, *quarta* G M, *quinta* G N ; hæ lineæ propositarum æquationum naturæ explicandæ inservient.

Fig. 209,  
210.

Nam sumpta A E =  $b$  (sumatur autem A E ob primam seriem ad partes I, ob secundam & tertiam ad partes H) & fiat angulus F E H semirectus (iste quidem pro prima & secunda serie inclinans versus H, pro tertia reclinans ab H, ut Schema satis monstrat) rum rectæ E F cum expositis lineis intersectiones respectivæ radices  $a$  determinabunt ; nempe si per has ductæ concipiantur ad A H perpendiculares (L G, M G, N G) erunt interceptæ A G radicibus  $a$  æquales respectivè.

Not.

Exhinc constat, quòd

1. In hac explicatione *coëfficiens*  $b$  indeterminata habetur ; ut in præcedentibus ipsa  $n$ .

2. In prima & secunda serie semper una positiva radix habetur, & unica.

3. In secunda serie minima radix ipsi A B, vel  $n$  æquatur.

4. Communis omnium linearum *nodus* est punctum X, ubi B X (vel  $a$ ) =  $n$ .

5. In tertia serie subindè duæ habentur radices positivæ (quando scilicet E F curvas bis secatur) nonnunquam una tantum (cùm E F ipsarum aliquam contingat ; id quod accidit in secundo gradu cùm

$a = \frac{b}{2}$  ; in tertio cùm  $a = \frac{2}{3}b$  ; in quarto cùm  $a = \frac{3}{4}b$ ) aliquando nulla, cùm E F infra tangentes cadit, & adeò nusquam curvis occurrat.

6. Secundi gradûs curva est *hyperbola*, reliquæ *hyperboliformes*, quarum communes *asymptoti* sunt rectæ A H, A D.

## Series quarta.

$$a + \frac{cc}{a} = n.$$

$$aa + cc = nn.$$

$$a^3 + cca = n^3.$$

$$a^4 + ccaa = n^4.$$

Fig. 211.

Sit recta indefinitè protensa AH, & huic perpendicularis AD; fiat autem angulus RAH semirectus; tum utcumque ducatur GZK ad AD parallela; & facto AG.AC::AC.ZK; per K intra angulum DAR describatur *hyperbola* KXK; sint denuò curvæ CLL, AMM, ANN tales, ut inter GZ, GK sint *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; hæc proposito deservient. Nam si AG (vel GZ) dicatur  $a$ , erit  $GK = a + \frac{cc}{a}$ ; & GLq =  $aa + cc$ ; & GM cub =  $a^3 + cca$ ; & GNqq =  $a^4 + ccaa$ .

Not.

1. Designantur radices, ut in præcedentibus, positâ  $AE = n$ , & ductâ EF ad AH parallelâ.

2. Si  $AP = AC$ , erit PX ad *hyperbolam* KXK ordinarum *minima*; unde si  $AE$  (vel  $n$ )  $\supset$  PX; nulla dabitur radix in primo gradu.

3. Curva CLL est *hyperbola aquilatera*, cujus *centrum* A, *semi-axis* AC; quæ & ordinarum est *minima*; alioquin si  $n \leq c$ , semper una vera radix habetur, & unica.

4. Reliquæ AMM, ANN sunt hyperboliformes ad infinitum excurrentes; unde semper una vera radix habetur, neque plures.

5. Si fuerit  $Y\alpha = \frac{1}{2} YX$ ;  $Y\epsilon = \frac{1}{3} YX$ ;  $Y\gamma = \frac{1}{4} YX$ , & per puncta  $\alpha, \epsilon, \gamma$ , tractæ concipiantur *hyperbola* (habentes & ipsæ *asymptotos* DA, AR)  $\alpha\lambda, \epsilon\mu, \gamma\nu$ ; erunt hæc ipsarum curvarum CLL, AMM, ANN *asymptoti*. (Similes etiam *asymptoti* conveniunt lineis posthac describendis, quanquam de illis conticeamus.)

6. Hinc in secundo gradu  $a + \frac{cc}{2a} \leq n$ ; in tertio  $a + \frac{cc}{3a} \leq n$ ; in

in quarto  $a + \frac{cc}{4a} = n$ ; quæ tamen inæqualitas eo minor est, quò  
A E (vel  $n$ ) major existit.

$$a + \frac{cc}{a} = n.$$

$$a + \frac{cc}{a} = \frac{nn}{a}.$$

$$a + \frac{cc}{a} = \frac{n^3}{a^2}.$$

$$a + \frac{cc}{a} = \frac{n^4}{a^3}.$$

Possit hæc series explicari juxta præcedentium modum secundum, Fig. 212.  
& easdem adhibendo curvas L X L, M X M, N X N; quarum nimi-  
rum proprietas est, ut rectâ G K ductâ ad A H utcumque perpendicu-  
lari, sit  $GL = \frac{nn}{AG}$ ; &  $GM = \frac{n^3}{AG^2}$ ; &  $GN = \frac{n^4}{AG^3}$ .

Nam si fiat angulus H A R semirectus, & utcumque ducatur G E O  
ad A H perpendicularis; & sit G E . c :: c . E O; & per O intra a-  
symptotos A D, A R describatur hyperbola O O; hujusce cum expo-  
sitis lineis L X L, M X M, N X N intersectiones, radices  $a$  respectivas  
determinabunt; ductis utique L G, M G, N G ad A H perpendicu-  
laribus, erunt interceptæ A G ipsæ  $a$  æquales respectivè.

Possint consimili modo subsequentes omnes æquationes explicari;  
sed eas modo duntaxat priore dabimus expofitas.

### Series quinta.

$$\left. \begin{aligned} \frac{cc}{a} - a &= n. \\ cc - aa &= nn. \\ cca - a^3 &= n^3. \\ ccaa - a^4 &= n^4. \end{aligned} \right\}$$

Fig. 213.

## Series sexta.

$$\begin{array}{l}
 a - \frac{cc}{a} = n. \\
 aa - cc = mn. \\
 a^3 - cca = n^3. \\
 a^4 - csaa = n^4.
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} a - \frac{cc}{a} = n. \\ aa - cc = mn. \\ a^3 - cca = n^3. \\ a^4 - csaa = n^4. \end{array}} \right\}$$

Fig. 213.

Fiat angulus  $RAI$  semirectus, &  $AD$  ad  $AI$  perpendicularis; in qua  $AC = c$ ; tum utcumque ductâ  $GZ$  ad  $AD$  parallelâ, sit  $AG$  (vel  $GZ$ ).  $AC :: AC \cdot ZK$ , & per  $K$ , intra angulum  $DAR$  describatur *hyperbola*  $KYK$ ; tum sint curvæ  $CLYHL_\lambda$ ,  $AMYHM_\mu$ ,  $ANYHN_\nu$  tales, ut inter  $AG$  (vel  $GZ$ ) &  $GK$  sit *media*  $GL$ , *bimedia*  $GM$ , *trimedia*  $GN$ ; hæc proposito deservient.

Constat hoc, ut in præcedente; & quo pacto radices respectivè determinantur. Verum adnotetur præterea.

Not.

1. Curvæ  $CLH$ ,  $AMH$ ,  $ANH$  ad quintam seriem pertinent; reliquæ  $HL_\lambda$ ,  $HM_\mu$ ,  $HN_\nu$  ad sextam.

2. Quoad curvas ad quintam seriem pertinentes; si  $A\phi = \sqrt{\frac{ACq}{2}}$ , & ordinetur  $\phi Y$ ; erit  $Y$  communis linearum intersectio, seu *nodus*.

3. In harum primo gradu ordinata  $AK$  est infinita, in secundo  $AC$  est maxima; in tertio si fuerit  $AP = \sqrt{\frac{ACq}{3}}$ , & ordinetur  $PV$ , erit  $PV$  maxima (unde radicem una semper major est quam  $\sqrt{\frac{ACq}{3}}$  altera minor) in quarto si  $AQ = \sqrt{\frac{ACq}{4}} = \frac{AC}{2}$ , & ordinetur  $QX$ , erit  $QX$  maxima (unde radicem una major erit, altera minor ipsâ  $\frac{AC}{2}$ ).

4. Con-



4. Consequentèr in harum secundo gradu si  $n = \sqrt[3]{c}$ ; in tertio, si  $n^3 = cc\sqrt{\frac{cc}{3} - \frac{cc}{3}}\sqrt{\frac{cc}{3}} = \frac{2}{3}cc\sqrt{\frac{cc}{3}}$ ; vel  $n^6 = \frac{4}{27}c^6$ ; in quarto si  $n^4 = \frac{c^4}{4} - \frac{c^4}{16} = \frac{3}{16}c^4$ ; nulla radix habetur; unam in istis casibus recta EF curvas supergreditur; nec iis occurrit.

5. Idem in his omnibus maxima possibilis radix est  $AH = AC$ .

6. Curva CYH est *Circuli quadrans*, reliquæ AMH, ANH quodammodo *non locis suis*.

7. Ad sextam seriem pertinentium curva HLL est *hyperbola æquilatèra*, cujus axis AH; reliquæ sunt *Hyperboliformes*. Unde quoad hanc seriem liquet cætera.

### Series septima.

$$a + b + \frac{cc}{a} = n.$$

$$aa + ba + cc = nn.$$

$$a^3 + baa + cca = n^3.$$

$$a^4 + ba^3 + cca a = n^4, \&c.$$

In recta BAH indefinitè protensà capiatur  $AB = b$ ; & in AD ad BH perpendiculari sit  $AC = c$ ; sint etiam anguli HAR, HBS Semi-recti; tum arbitrariè ductà GY ad AH perpendiculari quæ ipsam BS secet in Y; fiat  $AG.AC :: AC.YK$ ; & per K intra angulum DVS describatur *hyperbola* KKK; sint demum curvæ CLL, AMM, ANN tales, ut inter AG (vel GZ) & GK sit *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; hæc satisfacient negotio. Nam est  $GK = a$

Fig. 214.

$$+ b + \frac{cc}{a}; \& GL q = aa + ba + cc; \& GM cub = a^3 + baa + cca; \& GN qq = a^4 + ba^3 + ccaa.$$

Not.

1. Secundi gradus curva CLL est pars *hyperbolæ æquilatère*, cujus centrum O, ipsam AB bisecans; & liquidem  $AC = AO$ , est OH (ad AB perpendicularis, &)  $= \sqrt{ACq} - AOq$  ejus *semiaxis*; sin  $AC = AO$ , ejus axis est  $OI = \sqrt{AOq} - ACq$ . reliquæ verò curvæ AMM, ANN sunt *hyperboliformes*.

2. Hinc constat in secundo gradu si fuerit  $n \rightarrow C$ , nullam veram radicem dari; alioquin in omnibus una semper habetur, & unica; quoniam recta E F curvas semel interfecabit, nec pluries.

### Series octava.

$$\frac{cc}{a} + b - a = n.$$

$$cc + ba - aa = nn.$$

$$cca + baa - a^3 = n^3.$$

$$ccaa + ba^3 - a^4 = n^4, \&c.$$

### Series nona.

$$a - b - \frac{cc}{a} = n.$$

$$aa - ba - cc = nn.$$

$$a^3 - baa - cca = n^3.$$

$$a^4 - ba^3 - ccaa = n^4, \&c.$$

Fig. 215.

In recta A I sumatur  $AB = b$ ; & in A D ad ipsam A I perpendiculari sit  $AC = c$ ; fiant autem anguli I A R, A B S semirecti; ducaturque recta Z G K ad A I utcumque perpendicularis, ipsam B S secans ad  $\xi$ ; & sit  $AG.AC :: AC.\xi K$ ; tum per K intra angulum D S B describatur hyperbola KYHK; sint denuo curvæ CLHL $\lambda$ , AMHM $\mu$ , ANHN $\nu$  tales, ut inter A G, G K sint media GL, bimedia G M, trimedia G N; hæ curvæ proposito satisfacient; constat autem hoc ut in præcedente.

Not.

1. Curvæ C L H, A M H, A N H ad octavam seriem pertinent, reliquæ verò H L  $\lambda$ , H M  $\mu$ , H N  $\nu$ , ad nonam.

2. Quoad octavam seriem, si bisecetur A B in O, & ordinetur O T ad curvam C L H est O T maxima; sin fiat  $AP = \frac{b}{3} + \sqrt{\frac{bb}{9}}$

$\frac{cc}{3}$ , ac ordinetur P V ad curvam A M H, erit P V maxima; item si

$AQ = \frac{2}{3}b + \sqrt{\frac{2}{3}bb + \frac{cc}{2}}$ , & ordinetur QX ad curvam ANH erit QX maxima.

3. Hinc, si in secundo harum gradu sit  $n = \sqrt{cc + \frac{bb}{4}}$ ; in tertio si (posito fore  $f = \frac{b}{3} + \sqrt{\frac{bb}{9} + \frac{cc}{3}}$ ) sit  $n = cc f + bff - f^3$ ; in quarto, si (posito fore  $g = \frac{2}{3}b + \sqrt{\frac{2}{3}bb + \frac{cc}{2}}$ ) sit  $n = ccgg + bg^3 - g^4$ ; nulla datur radix; nam his suppositis, recta EF curvis non occurret, respectivè.

4. Si fuerit  $A\phi = \frac{b}{4} + \sqrt{\frac{bb}{16} + \frac{cc}{2}}$ , & ordinetur  $\phi Y$ ; erit Y *Nodus* curvarum; unde si  $n = A\phi$ ; erit  $A\phi$  una radicum in omnibus.

5. Curva CLH est *circumferentia Circuli*, cujus *Centrum* O; reliquæ A M H, A N H sunt *Cycliformes*.

6. Peculiare est in secundo gradu, quod si  $n = c$ , detur una tantum radix.

7. In hac radicum maxima (quæ & minima est in nona serie) est  $AH = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} + cc}$ .

8. Curva HL a est *hyperbola æquilatera*, cujus *semiaxis* OH; reliquæ HM u, H N v sunt *hyperboliformes*; unde patet in serie nona semper unam, & hanc unicam radicem haberi.

### Series decima.

$$a + b - \frac{cc}{a} = n.$$

$$aa + ba - cc = nn^2$$

$$a^3 + baa - cca = n^3.$$

$$a^4 + ba^3 - ccaa = n^4, \&c.$$

Fig. 216.

Series

## Series undecima.

$$\frac{cc}{a} - b - a = n.$$

$$cc - ba - aa = nn.$$

$$cca - baa - a^3 = n^3.$$

$$ccaa - ba^3 - a^4 = n^4, \&c.$$

Fig. 216.

In recta B A H sumatur B A =  $b$ ; & in AD ad A H perpendiculari sit A C =  $c$ , sintque anguli H A R, HBS semirecti; tum utcumque ductâ rectâ GK  $\xi$  ad A H perpendiculari (quæ ipsam BS fecerit in  $\xi$ ; sit A G . A C :: A C .  $\xi$  K; & per K intra asymptotas V D, V S describatur hyperbola KYHK; sint demum curvæ CLHL $\lambda$ , AMHM $\mu$ , ANHN $\nu$  tales, ut inter A G (vel GZ) & GK sint media GL, bimedia GM, trimedia GN; hæc proposito servient, id quod constat, ut in præcedentibus.

## Not.

1. Curvæ HL $\lambda$ , HM $\mu$ , HN $\nu$  ad decimam seriem pertinent; reliquæ CLH, AMH, ANH ad undecimam.

2. Curva HL $\lambda$  est hyperbola aequilatera, & curva CLH circularis circumferentia pars, utriusque commune centrum est O, ipsam AB

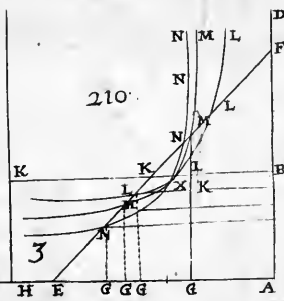
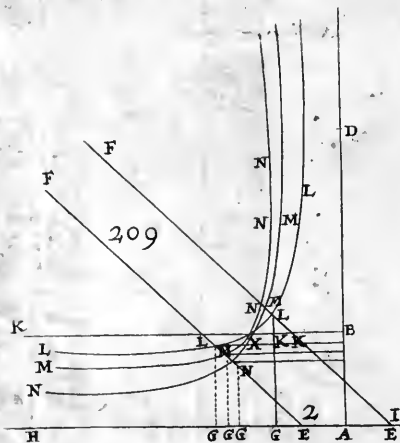
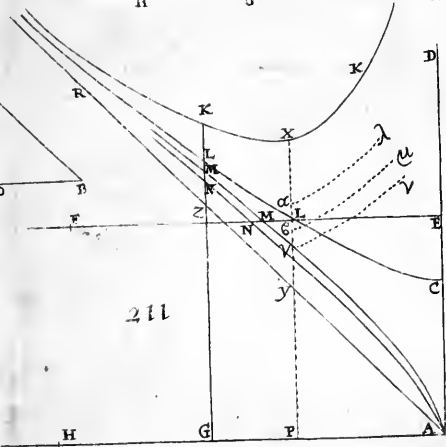
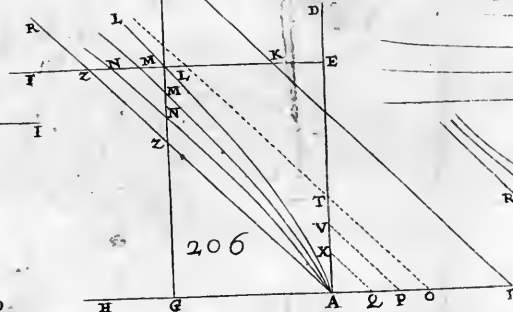
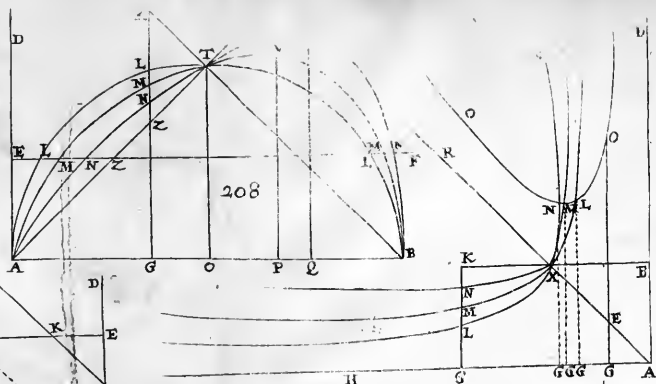
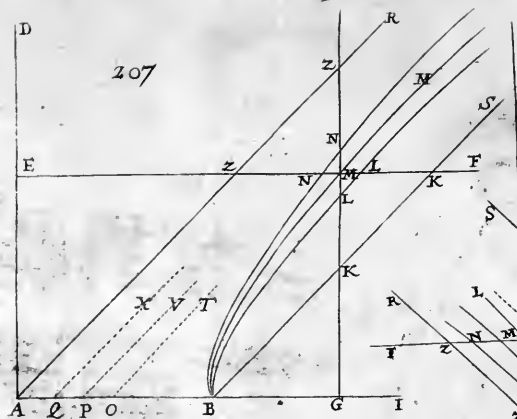
bifecans (unde  $AH = \sqrt{\frac{bb}{4} + cc} - \frac{b}{2}$ )

3. In decima serie radix una semper habetur, & unica; in undecima nunc duæ, nunc una, subinde nulla.

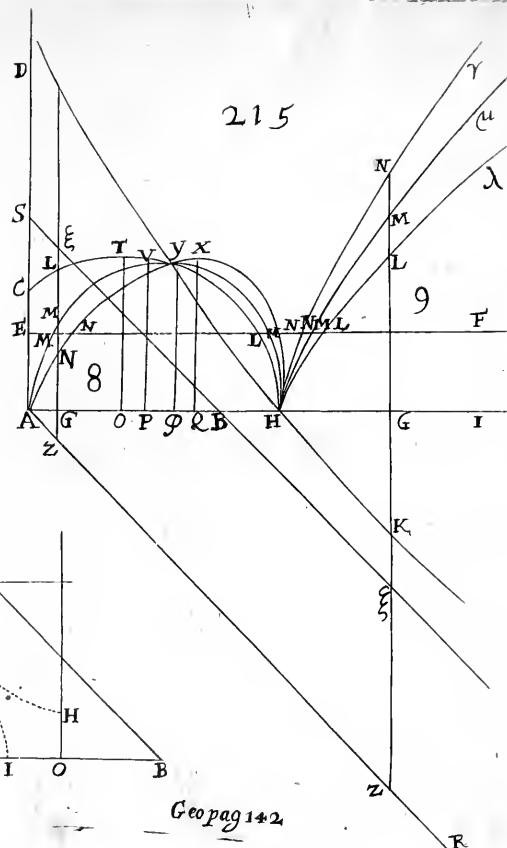
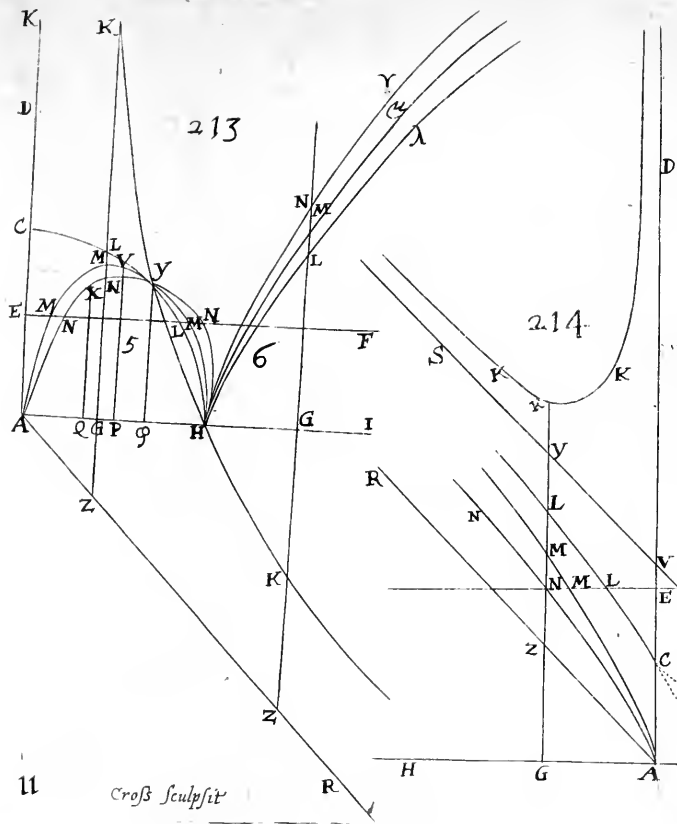
4.  $A\phi = \frac{cc}{b}$ ; &  $A\psi = \sqrt{\frac{bb}{16} + \frac{cc}{2}} - \frac{b}{4}$ ; & ordinentur  $\phi$  Y,  $\psi$  X; puncta Y, X sunt nodi curvarum.

5. In undecimæ secundo gradu ordinata A C est maxima; sin A P =  $\sqrt{\frac{bb}{9} + \frac{cc}{3}} - \frac{b}{3}$ ; & à P ad curvam AMH ordinetur P  $\gamma$ ,

hæc maxima erit; item si A Q =  $\sqrt{\frac{9bb}{64} + \frac{cc}{2}} - \frac{3b}{8}$ ; & à Q











Qad curvam ANH ordinetur Q<sup>d</sup>, hæc etiam maxima erit; unde de radicum limitibus fiet iudicium; ut in iis, quæ ad seriem octavam sunt adnotata.

### Series duodecima.

$$a - b + \frac{cc}{a} = n.$$

$$aa - ba + cc = nn.$$

$$a^3 - baa + cca = n^3.$$

$$a^4 - ba^3 + ccaa = n^4, \&c.$$

Fig. 217.

### Series decima tertia.

$$b - a - \frac{cc}{a} = n.$$

$$ba - aa - cc = nn.$$

$$baa - a^3 - cca = n^3.$$

$$ba^3 - a^4 - ccaa = n^4, \&c.$$

Pro his, Sit AB = b; & AC = c; & angulus ABS femirectus, & Gg ad AB circunque perpendicularis, & AG.AC::AC.ξK; & KHKIK, hyperbola asymptotis SA, SB descripta; denuò curvæ CLHLIL<sub>λ</sub>, AMHMIM<sub>μ</sub>, ANHNIN<sub>ν</sub> tales sint, ut inter AG, GK sit media GL, bimedia GM, trimedia GN.

Fig. 217.

Not.

1. Curvæ CLH, AMH, ANH, atque curvæ IL<sub>λ</sub>, IM<sub>μ</sub>, IN<sub>ν</sub> ad seriem duodecimam spectant, verum intermediæ curvæ HLI, HMI, HNI ad decimam tertiam.

2. Curvæ CLH, IL<sub>λ</sub> sunt hyperbola æquilatera, quarum commune centrum O (rectam AB bifecans) & semiaxis OH (vel OI) = √AOq. — ACq reliquæ tales sunt, quales figura monstrat.

3. Curvæ

3. Curva HLLI est *semicirculus*; reliquas itidem ostentat Schema.

4. Si  $A\zeta = \frac{cc}{b}$ ;  $A\psi = \frac{b}{4} - \sqrt{\frac{bb}{16} - \frac{cc}{2}}$ ; &  $A\phi = \frac{b}{4} + \sqrt{\frac{bb}{16} - \frac{cc}{2}}$ ; ordinenturque rectæ  $\zeta V$ ,  $\psi X$ ,  $\phi Y$ ; erunt puncta  $V$ ,  $X$ ,  $Y$  *nodi* curvarum (si  $b = \sqrt{8cc}$ , deerunt *nodi*  $X$ ,  $Y$ ; si  $b = \sqrt{8cc}$ ; ii coalescent).

5. Ordinatorum ad curvam CLH *maxima* est ipsa AC; sin AP  $= \frac{b}{3} - \sqrt{\frac{bb}{9} - \frac{cc}{3}}$ , & ordinetur P $\gamma$  ad curvam AMH; erit P $\gamma$  *maxima*; item si  $AQ = \frac{2}{3}b - \sqrt{\frac{2}{64}bb - \frac{cc}{2}}$ ; & ordinetur Q $\delta$  ad curvam ANH, erit Q $\delta$  *maxima*.

6. Ordinatorum ad curvam HLLI *maxima* est ipsa OT; sin AP  $= \frac{b}{3} + \sqrt{\frac{bb}{9} - \frac{cc}{3}}$ , & ad curvam HMI ordinetur p $g$ , erit p $g$  *maxima*; item si  $Aq = \frac{2}{3}b + \sqrt{\frac{2}{64}bb - \frac{cc}{2}}$ ; & ordinetur q $d$  ad curvam HNI, erit q $d$  *maxima*.

7. Hinc radicum limites dignoscentur, ut innuitur in iis, quæ ad octavam seriem animadversa sunt.

8. Patet in Serie duodecima nunc tres, modo duas, semper unam radicem haberi; in decima tertia verò subinde duas, aliquando tantum unam, interdum nullam haberi.

9. Et hæc quidem constant posito fore  $\frac{b}{2} - c$ ; at si  $\frac{b}{2} = c$ ; evanescet Series decima tertia; coalescent puncta H, O, I; recta AB *hyperbolam* KKK tanget; curvæque CLH, IL $\lambda$  in rectas líneas degenerabunt.

10. Sin  $\frac{b}{2} = c$ ; etiam evanescit Series decima tertia; *hyperbola* KKK tota infra rectam AB jacente; quo casu curva CLL erit *hyperbola æquilatera*, habens centrum O, semiaxem (ipsi AB perpendiculari) OT  $= \sqrt{ACq} - AOq$ ; tunc & curvæ AMM, ANN ad infinitum procurrent, sic ut æquationes, quæ in Serie duodecima, unam semper, & unicam radicem obtineant. Hæc suffecerit insinuisse; quin & rem totam hactenus particulatim attigisse. Subnectemus autem notas quasdam magis generales.

In *premissis* explanationes animadvertatur generatim

1. Propositam quamvis æquationem explicans *curva* designatur hoc modo: proponatur, exempli causâ, æquatio  $a^3 + ba^2 + cc a^2 - d^3 aa - f^2 a = n^3$ ; In recta indefinitè protensa HI designetur punctum A, pro radicum termino, vel origine; tum arbitrariè sumptâ AG pro indeterminatâ radice  $a$ ; fiat GK æqualis primo seriei propositæ æquationem continentis gradu; nempe sit hic  $GK = a + b + \frac{cc}{a} - \frac{d^3}{aa} - \frac{f^2}{a^3}$  (utique rationem  $a$  ad  $c$  semel continuando sit

$\frac{cc}{a}$ ; rationem  $a$  ad  $d$  bis continuando sit  $\frac{d^3}{aa}$ ; ac ita porro) tum inter

AG, GK tot mediarum proportionalium, quot æquationis propositæ gradus exigit (is autem a pura quæsitæ radice potestate indicatur) in hoc nempe casu quatuor mediarum proportionalium prima sit GO; per ejusmodi puncta O traducta curva AOO proposito deserviet.

2. De radicibus falsis, seu negativis nihil attingimus supra; cæterum eæ reperiuntur hoc modo. Æquationi propositæ subrogetur altera, cujus in locis paribus (etiam vacuos locos adnumerando) signa sunt illis contraria, quæ habet æquatio proposita; erunt hujusce *substitutæ æquationis* radices veræ, seu positivæ ipsius propositæ æquationis radices falsæ, seu negativæ. *Exemplo* sit æquatio  $a^3 + baa = n^3$ ; vel  $a^3 + baa^* - n^3 = 0$ . Subrogetur  $a^3 - baa^* - n^3 = 0$ ; & hujus, tum supra edoctum, veræ radices designentur, hæ *propositæ æquationis* falsæ erunt. Rursus sit  $a^3 - baa = n^3$ , vel  $a^3 - baa - n^3 = 0$ ; substituatur æquatio  $a^3 + baa + n^3 = 0$ ; hæc nullam veram radicem obtinet; ergo nec *æquatio proposita* falsam admittit. † In Serie 3.

3. Quinimo datâ verâ radice quâpiam, depressioris gradûs æquatio quædam falsis reperiendis inserviet, qualis ita determinatur. Proponatur æquatio quævis, puta  $a^3 + baa = n^3$ ; cujus nota sit radix una, quæ vocetur  $f$ . Construatur æquatio planè similis propositæ, eademque *coefficientes* habens, tantum pro  $a$  substituendo  $f$ ; nempe  $f^3 + bff = n^3$ . ergo  $a^3 + baa = n^3 = f^3 + bff$ ; adeoque  $a^3 + baa - f^3 - bff = 0$ . dividatur hæc æquatio (id quod sem-

per fieri potest) per  $a - f$ ; proveniet  $aa + \frac{-ba - bf}{a - f} = 0$ ; cujus æ-

quationes eadem erunt cum reliquis æquationis propositæ radicibus; quæ proinde duas colligitur radices falsas habere; itaque mutatis loco-

rum parium signis, ut ita fiat  $aa - \frac{ba - bf}{a - f} = 0$ ; hujus æquationis

veræ radices propositæ falsas exhibent. Hic insuper modus æquationis propositæ, quatenus illa ex aliarum in se ductu provenit, constitutionem ostendit.

4. Radices maximæ & minimæ deprehenduntur in quacunque serie ponendo (quovis in gradu seriei) fore  $n=0$ ; ut in octava serie sit  $ba - aa - cc = 0$ ; adeoque  $cc = aa - ba$ , erit  $a (= \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4}} + cc)$  maxima radix; item in Serie duodecima sit  $aa - ba - cc = 0$ , unde  $cc = ba - aa$ , erit  $a (= \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4}} - cc)$  radix maxima, &  $a (= \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4}} - cc)$  radix minima.

5. Curvarum nodi, vel intersectiones innotescunt, cujusvis in Serie quovis gradu, ponendo fore  $a=n$ ; ut in octava Serie, ubi  $ba - aa - cc = nn$ , sit  $a=n$ , ergò  $ba - aa - cc = aa$ ; vel  $cc = 2aa - ba$ ; vel  $\frac{cc}{2} = aa - \frac{ba}{2}$ ; quare  $a = \frac{b}{4} + \sqrt{\frac{bb}{16}} + \frac{cc}{2}$ . Item in Serie duodecima, ubi  $aa - ba - cc = nn = aa$ ; erit ideò  $cc = ba$ ; ac inde  $a = \frac{cc}{b}$ .

6. Ordinata maxima, minimeque variis nodis, methodisque passim notis investigantur; ego simul illas atque curvarum *tangentes* unâ operâ sic determino. Sit curva  $A\gamma H$ , ad Seriem undecimam pertinens, ejusque gradum, cujus æquatio est  $cca - baa - a^3 = n^3$ ; posito  $\gamma T$  curvam tangere, &  $\gamma P$  ad  $AH$  ordinari, reperio (de supra monstratis) fore  $PT = \frac{3n^3}{3aa + 2ba - cc}$ , tum considero, si ordinata  $P\gamma$  sit maxima, fore tangentem ipsi  $HA$  parallelam, seu rectam  $PT$  esse infinitam; quare cum sit  $n^3 = PT \times (3aa + 2ba - cc)$ ; &  $n$  sit finita, patet esse  $3aa + 2ba - cc = 0$ ; vel  $aa + \frac{2}{3}ba = \frac{cc}{3}$ ; adeoque  $\sqrt{\frac{bb}{9} + \frac{cc}{3}} - \frac{b}{3} = a = AP$ .

7. Adnoto demùm è maximis & minimis ordinatis radicum limites derivari; nempe si reperiatur ad maximam ordinatam pertinentis radices (velut ipsius  $AP$  in exemplo proximè superiori) valor, & is ubique in æquatione pro ipsâ  $a$  substituatur, si quod provenit, deficiat ab homogeneo (quod vocant) *comparationis*, problema construi nequit

nequit, aut saltem radicibus aliquot caret, quas æquationis gradus & species præ se ferunt. Eadem *minimarum* est ratio; tantum ibi proveniens *summa* debet *homogeneum* illud excedere, quò radix aliqua, vel omnes habeantur. *Exempla* comparent in præmissis. Hic itaque subsisto.

*Laus DEO Optimo Maximo.*

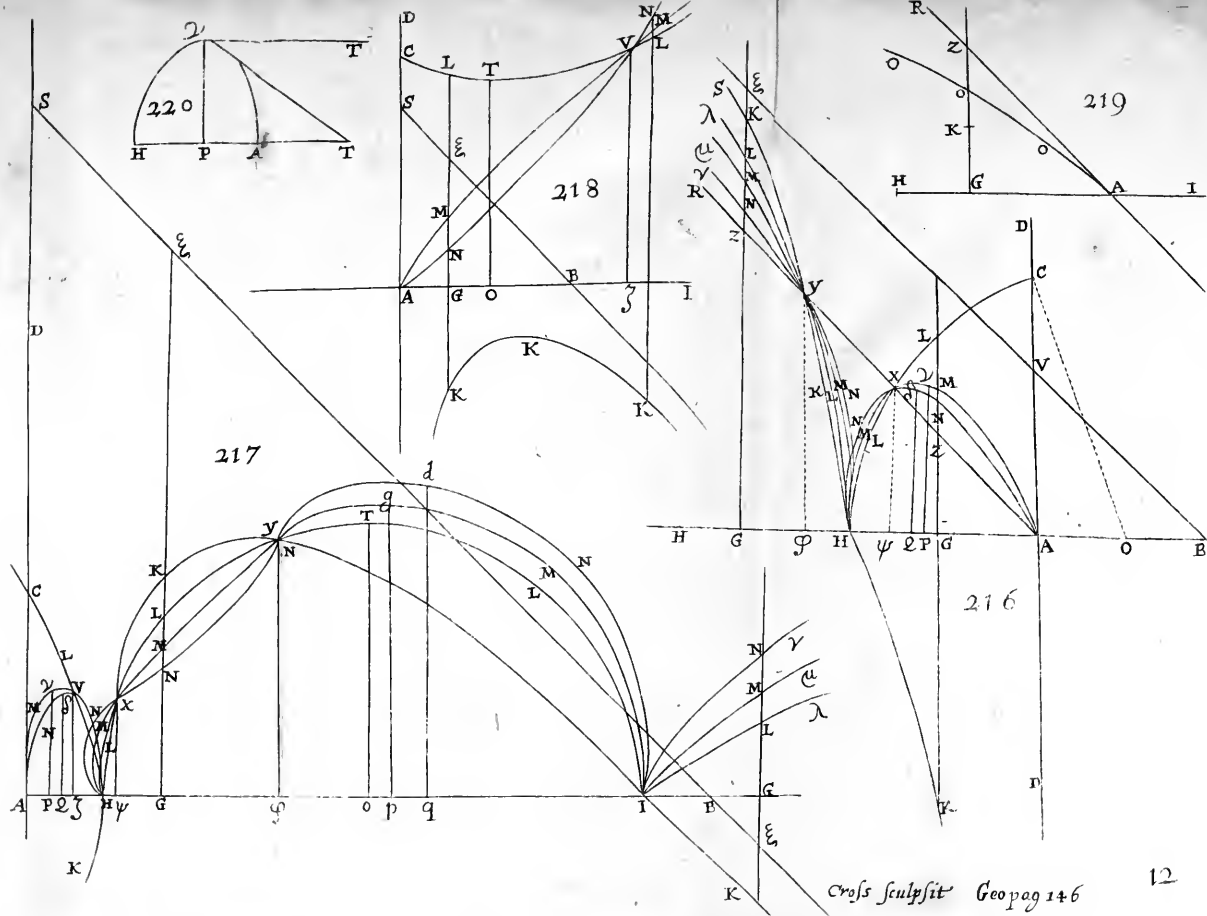
---

*FINIS.*

---

# ERRATA.

**P** *Ag.* 5. *Lin.* 20. ad testatur, lege testatam facit. *p.* 9. *l.* 3. *leg.* velocitatum.  
*p.* 14. *l.* 36. *leg.* plana. *p.* 17. *l.* 24. *leg.* prohibetur. *p.* 18. *l.* 32. *leg.* à puncto B.  
*p.* 19. *l.* 4. *leg.* E D, G K. *p.* 22. 10. *leg.* VD multitudo censi. *p.* 23. *l.* 7.  
*leg.* radius ad. *p.* 23. *l.* 10. *leg.* nec non, datis. *p.* 24. *l.* 2. *leg.* effectæ. *p.* 24. *l.* 24.  
*leg.* quidem ut punctum. *p.* 30. *l.* 18. *leg.* protracta. *p.* 32. *l.* 5, 6. *leg.* tangentes  
(una — hujus) *p.* 35. *l.* 5. *leg.* tangant. *p.* 35. *l.* 6. *leg.* M P. *p.* 35. *l.* 12. *leg.* T P.  
*p.* 37. *l.* 2. *leg.* divisâ. *p.* 40. *l.* 4. *leg.* arcus N H major est ipsâ. *p.* 41. *l.* 32. *leg.* ver-  
tari. *p.* 43. *l.* 15. *leg.* aliâ H R. *p.* 47. *l.* 26. Fig. 39, & 40. *pag.* 49. *l.* 16. *leg.*  
2 f x y. *p.* 52. *l.* 3. *dele* Fig. 51, 52. *p.* 52. *l.* 6. *leg.* Fig. 51, 52. *pag.* 52. *l.* 24. *leg.*  
Fig. 53. *p.* 55. *l.* 15. *dele* se interfecantes in X. *p.* 57. *l.* 25. *leg.* d P. *p.* 58. *l.* 19.  
*leg.* F B F ipsi K E K. *p.* 59. *l.* 2. *leg.* K E K. *p.* 61. *l.* 26. *leg.* punctam. *p.* 62. *l.* 27.  
*leg.* K O — K A. *p.* 63. *l.* 16. *leg.* contactum. *p.* 64. *l.* 22. *leg.* Fig. 80. *p.* 65. *l.* 4.  
*leg.*  $\sigma\epsilon\rho\lambda\epsilon\gamma\acute{\iota}\alpha\upsilon$ . *p.* 67. *l.* 11. *leg.* tum alia. *p.* 67. *l.* 35. *leg.* Q O q = Z q. *p.* 68.  
*l.* 7. *leg.* F Q. *p.* 70. *l.* 22. *leg.* Fig. 95. *p.* 76. *l.* 3. *leg.* H T (a) — G A. *p.* 76.  
*l.* 11. *leg.* D F. *p.* 76. *l.* 18. *leg.* P K. *p.* 76. *l.* 20. *leg.* tanget recta R F K. *p.* 78. *l.* 24.  
*leg.* infra. *p.* 79. *l.* 18. *dele* Fig. 113. *p.* 79. *l.* 31. *leg.* Fig. 113. *p.* 86. *l.* 31.  
*leg.*  $\sqrt{V C Z \phi} = C G$ . *p.* 87. *l.* 14. *leg.*  $D \psi^3 = \sqrt{\frac{22}{243}}$ . *pag.* 91. *l.* 9. *leg.*  
in recta. *p.* 91. *l.* 23. *leg.* æquale rectangulo ex. *p.* 91. *l.* 24. *leg.* P, Q. *p.* 96.  
*l.* 15. *leg.* C A. C D. *p.* 96. *l.* 22. *leg.*  $A D = \frac{5}{3} C A$ . *p.* 97. *l.* 2. *leg.* totam.  
*p.* 102. *l.* 25. *leg.* O P ad O T. *pag.* 106. *l.* 10. *leg.* applicatis, *p.* 106. *l.* 19. *leg.*  
semi-axis. *p.* 112. *l.* 2. *leg.* applicatis. *p.* 114. *l.* 22. *leg.*  $\frac{P L Q O}{2 \text{ Rad.}}$  *p.* 114. *l.* 26.  
*leg.* propositum. *p.* 116. *l.* 5. *leg.* R. S. *p.* 122. *l.* 22. *leg.* Fig. 183. *p.* 123. *l.* 1. *leg.*  
Fig. 184. *p.* 125. *l.* 4. *leg.* D M = D I. *p.* 128. *l.* 7. *leg.* Fig. 195. *p.* 128. *l.* 11.  
*dele* Fig. 195. *p.* 128. *l.* 23.  $\frac{P M}{\sqrt{A P M}}$ . *p.* 129. *l.* 13. *emerget* undecima Lect. *p.* 136.  
*l.* 20. *leg.* hyperbolæ. *pag.* 139. *l.* 3. *leg.* nam. *p.* 140. *l.* 1. *leg.* n — 26.  
à *p.* 105. ad *p.* 112. *l.* 1. *leg.* Lect. XII.



*cross sculptis Geopag 146*







**U**Bi (pag. 100) de Centro gravitatis parabolæ & paraboliformis verba fiunt, intelligantur non curvæ lineæ, sed iis comprehensa spatia, de quibus apparet isthic agi.

Sicubi ponitur  $\frac{\delta}{\sigma}$ , nec adponitur *indeterminata* ulla, designantur termini rationem exprimentes, quam habet circuli diameter ad ejus circumferentiam.



THE [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]  
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]  
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]  
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]  
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

## Addenda Lectionibus Geometricis.

*Vacua Pagella explende hæc adjici possunt: ὁμογενὴς vice, animadverto potuisse secundo Appendiculæ tertiæ Lectionis XII Problemati, pag. 122. Corollaria quedam adponi non injucunda, qualium adscribam unum & alterum.*

### Probl. I.

**D**etur linea quæpiam  $AMB$  (cujus axis  $AD$ , basis  $DB$ ) Fig. 221;  
curva  $ANE$  designetur talis, ut ductâ liberè rectâ  $MNG$   
ad  $BD$  parallelâ, quæ ipsam  $ANE$  secet in  $N$ , sit curva  $AN$   
æqualis ipsi  $GM$ .

Curva  $ANE$  talis sit ut si  $MT$  curvam  $AMB$ , &  $NS$  cur-  
vam  $ANE$  tangant, sit  $SG \cdot GN :: TG \cdot \sqrt{GMq} - TGq$ ,  
ipsa  $ANE$  Proposito faciet satis.

### Probl. II.

Iisdem quoad cætera Suppositis, & constitutis; curva  $ANE$   
jam talis esse debeat, ut curva  $AN$  semper æquetur interceptæ rectæ  
 $NM$ .

Curva  $ANE$  jam talis sit, ut sit  $SG \cdot GN :: 2 TG \times GM$ ;  
 $GMq - TGq$ ; erit  $ANE$  curva quæ desideratur.

### Probl. III.

Datur curva quæpiam  $DXX$ , cujus axis  $DA$ ; reperiatur curva Fig. 222;  
 $AMB$  proprietate talis, ut si liberè ducatur recta  $GXM$  ad ipsam  
 $AD$  perpendicularis, ponaturque  $SMT$  curvam  $AM$  tangere, sit  
 $MS$  æqualis ipsi  $GX$ .

Liquet rationem  $TG$  ad  $TM$  (hoc est rationem  $GD$  ad  $MS$ , vel  
 $GX$ ) dari; adeoque rationem  $TG$  ad  $GM$  quoque dari.

X

Inservit

Infervit hoc superficibus designandis, quarum in promptu sit dimensio, etenim (ductâ ME ad AD parallelâ) Superficies Solidi ex plani BME circa axem DB rotatu progeniti adæquat  $\frac{\text{Periph}}{\text{Rad}}$   $\times GD \times$ ; ut habetur in 11<sup>a</sup> Lectionis XII.

*In Lect. XI. appendice, numero XXXIII. de Cycloide profer-  
tur Theorema quoddam, id quod ex hujusmodi generaliori  
Theoremate deduci potuisset.*

Fig. 223.

Sit AMB curva quælibet, cujus Axis AD, basis DB, sit item curva ANE talis, ut si arbitrariè ducatur PMN ad DBE parallela, positoque rectam TN curvam ANE tangere, sit TN parallela subtensæ AM; completo Rectangulo ADEG erit Spatium trilineum AEG æquale Segmento ADB.

Huic suppar Theorema tale est: Iisdem positis, si tam Segmentum ADB, quam Spatium AEG circa Axem AG convertantur; erit productum è Segmento ADB Solidum producti ex AEG duplum.

E tangentium porrò contemplatione suborta est methodus, per quam expeditissimè plurima circa maximas quantitates Theoremata deducuntur; quæ certè si tempestivè se objecissent, digna censuisssem quæ Lectionibus infererentur, ex iis indigitabo nonnulla.

Fig. 224.

Sit curva quæpiam ALB, cujus Axis AD, basis DB; & huic parallelæ LG,  $\lambda \gamma$ ; item LT curvam tangat.

### Theor. I.

Sit  $m$  numerus quicunque, potestates exponens; si ponatur  $DG^{m-1} \times TG = GL^m$ , erit  $DG^m + GL^m$  maximum, seu majus quam  $D\gamma^m + \gamma^{\lambda m}$ .

### Theor. II.

Itidem sumpto numero  $m$ , si ponatur  $BL^{m-1} \times TL = GL^m$ ; erit  $GL^m + BL^m$  maximum seu majus quam  $\gamma^{\lambda m} + B\lambda^m$ .

### Theor. III.

Sint numeri quilibet  $m, n$ ; si ponatur  $m \times TG = n \times DG$ , erit  $DG^m \times GL^n$  maximum, seu majus quam  $D\gamma^m \times \gamma^{\lambda n}$ .

*Theor.*

Theor. IV.

Quod si ponatur  $m \times TL = n \times \text{arc } BL$ , erit  $GL^{\frac{n}{m}} \times BL^{\frac{m}{m}}$  maximum, seu majus quàm  $\gamma^{\frac{n}{m}} \times B^{\frac{m}{m}}$ .

Theor. V.

Si fuerit  $TG \times GL = DGLB$ , erit  $DGLB \times GL$  maximum, seu majus quàm  $D\gamma^{\wedge}B \times \gamma^{\wedge}$ .

Theor. VI.

Sin  $TG \times GL = 2 DGLB$ , erit  $GL \times \sqrt{DGLB}$  maximum, seu majus quàm  $\gamma^{\wedge} \times \sqrt{D\gamma^{\wedge}B}$ .

Haud difficili negotio, cum hæc demonstrantur, tum ejusmodi compluraprehenduntur.

*Ad illa verò succinctius comprobanda deservire possunt hujusmodi Theoremata.*

Sint duæ curvæ  $AGB$ ,  $DHC$  quarum communis axis  $AD$ , Fig. 225. sed ordinatæ inverso situ increscant ab  $A$  ad  $D$ , decrescant à  $D$  ad  $AC$ ; ad ordinatæ verò communis  $GEH$  terminos, recta  $GS$  curvam  $AGB$ , & recta  $HT$  curvam  $DHC$  contingant.

I. Si recta  $HT$  rectæ  $GS$  parallela sit, erit  $GEH$  maxima ordinatarum in continuum jacentium summa.

Nam utcumque ducta  $OKFLP$  ad  $GEH$  parallela (quæ Lineas fecet ut cernis) erit  $GH = QP \sqsubset KL$ .

Not. Verum hoc, si curvarum partes concavæ axi obversæ jaceant, aliàs  $GEH$  erit minima.

II. Si  $ES = ET$ , erit rectangulum ex  $EG$ ,  $EH$  maximum: Nam ob  $SE.SF :: EG.FO$ , &  $TE.TF :: EH.FP$ , erit  $SE \times TE . SF \times TF :: EG \times EH . FO \times FP$ , itaque cum sit  $SE \times TE \sqsubset SF \times TF$ , erit  $EG \times EH \sqsubset FO \times FP$ .



